

应用最优控制理论自动率定二维浅水方程的糙率参数

赖锡军, 姜加虎, 黄 群

(中国科学院南京地理与湖泊研究所湖泊与环境国家重点实验室, 江苏 南京 210008)

摘要: 应用偏微分方程最优化控制理论, 导出了二维浅水方程糙率自动率定的最优化系统, 实现了二维水力学模型计算中分布式糙率参数的自动率定算法。结合实际应用的可操作性, 按区块设定糙率, 对恒定流和非恒定流两种流态分别进行了常数糙率和随水深变化的糙率自动率定实验。数值实验表明, 在观测数据包含足够的信息时, 该方法不仅能够准确地自动率定出相关的糙率参数, 还能成功地将糙率随水深的变化关系式识别出来。但是, 糙率水深变化关系识别迭代收敛速度显著变慢, 因此, 建议采用相应的实现对策来考虑变糙率的洪水预测问题。

关 键 词: 糙率; 自动率定; 参数识别; 最优化控制; 浅水方程

中图分类号: TV133.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2008)03-0383-06

计算水力学从 20 世纪 70~80 年代兴起, 以有限差分格式为主^[1]; 20 世纪 90 年代以来, 基于有限体积法的新型高分辨率格式的建立和迅速发展^[2], 使应用数值手段研究复杂特征水流(如溃坝、水跃等)的能力也有了质的飞跃。水力学模型应用, 要给定各种参数, 如糙率、边界条件等, 当这些参数准确时可以获取理想的结果。其中, 糙率值是一个间接量, 不能直接测得, 实际应用通常是通过不断地调整数值, 将计算结果与水位、流量等观测资料进行比较, 从而取定一个较好的值。这个过程带入了很多的主观性, 得到的并不是最优解, 而且具有很强的经验性。

人工率定过程通常通过比较一些观测点的计算和观测值差异, 人为调整相关参数, 力图设定最“优”的糙率值, 使得差异最小, 这实际上是人脑对计算系统的识别过程。当问题变得复杂时, 很难估出准确的参数。偏微分方程的最优控制理论^[3]为这类受控于动力方程的系统的最优化控制问题提供了数学理论基础。其基本思想是引入代价函数, 借助伴随方程计算代价函数关于参数的梯度, 利用最小化算法自动调整参数使代价函数最小化, 从而获取最优的参数解。利用该方法, 本文实现了二维分布式糙率参数的自动率定(亦称为识别)。在二维浅水方程基础上导出了糙率参数自动率定的伴随方程, 利用建立的模型开展相关的率定实验。

1 水力学模型的基本方程

以二维浅水方程作为基本方程的水力学模型在环境、水利等涉水领域的科学和工程问题的研究中得到了广泛的应用。其常用的守恒型方程可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \quad (1)$$

式中 x, y 为笛卡儿直角坐标系; t 为时间; \mathbf{U} 为方程的状态变量向量; \mathbf{F}, \mathbf{G} 分别为 x, y 方向的通量向量; \mathbf{B} 为源项向量。表达式如下:

$$\mathbf{U} = (h, hu, hv)^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \left(hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right)^T \quad (3)$$

$$\mathbf{G} = \left(hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \quad (4)$$

收稿日期: 2007-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50709034; 40571028); 江苏省基础研究计划(自然科学基金)(BK2007611)

作者简介: 赖锡军(1977-), 男, 浙江遂昌人, 助理研究员, 博士, 主要从事环境水力学研究。E-mail: xjlai@niglas.ac.cn

$$B = (0, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy}))^T \quad (5)$$

式中 h 为水深; u 和 v 分别为 x 、 y 方向的流速; $S_{0x} = -\frac{\partial Z_b}{\partial x}$ 和 $S_{0y} = -\frac{\partial Z_b}{\partial y}$ 为 x 、 y 方向的底坡项 (Z_b 为床底高程); 阻力坡降项 S_{fx} 和 S_{fy} 用曼宁公式计算, 其表达式为 (n 为糙率)

$$S_{fx} = \frac{n^2 hu \sqrt{(hu)^2 + (hv)^2}}{h^{7/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 hv \sqrt{(hu)^2 + (hv)^2}}{h^{7/3}}$$

为求解特定区域内的水流, 需要同时给定相应的初始条件和边界条件。初始条件给定如下:

$$U_0 = \left[h|_{t=t_0}, hu|_{t=t_0}, hv|_{t=t_0} \right]^T$$

边界条件包含陆地边界和水域的开边界两类:

$$\text{陆地边界条件: } u_n| = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_n}| = 0$$

水域开边界 (这里列出给定水深和单宽流量两种情形): 对水深 (水位) 给定, $h(t)|$ 已知; 对单宽流量给定, $q_n(t)|$ 已知。

2 糙率控制的最优化系统

2.1 代价函数

人工率定参数时, 水力学模型和观测数据是独立的, 观测数据只能被应用于模拟结果的对比验证。如何更好地利用观测、融合数据和模型以更好地预测实际的流动状态, 减少模型所带来的预测误差。变分最优化系统理论为该类受偏微分方程控制的系统提供了强有力的数学理论基础。它引进代价函数 J 来度量模型结果与观测数据的差异, 将原来的水力模拟正问题转化为求解受动力方程 (这里为二维浅水方程组) 约束的最小化 J 获取最优参数的过程, 最优参数对应的解也就是模型和观测拟合最好的最优解。

一般地, J 被定义成二次泛函的形式。这里, 为实现糙率的自动率定, 可引进如下 J :

$$J(U; n) = \int_0^T \frac{1}{2} (U - U^{obs})^2 dt + \frac{1}{2} (n - n^b)^2 \quad (6)$$

式中 U^{obs} 为对应状态变量 (水深、流速) 的观测值; n^b 为糙率的初始猜测值, 亦称背景值; \cdot 为权系数; \int 表示给定空间上的范数。

代价函数第一项为观测项, 表示模型计算和观测数据的差异, 反映模拟状态和观测的拟合程度; 第二项可称为背景项, 亦称正则项, 该项主要为了改善最优化问题的适定性。当观测数据稀少, 最优化问题自由度很高时, 可以适当增大 \cdot 值, 使最优化的结果尽量不远离给定的初始猜测值; 或者给定的初始猜测值有较高的可信度时也可提高相应的权值, 其取值依赖问题而定。

2.2 二维浅水方程糙率控制系统

为获取 n 的最优估计值, 需计算 J 关于控制变量 n 的梯度, 当梯度 $\frac{\partial J}{\partial n}$ 为零时, J 取极值, 对应的 n 则为最优解。这里利用最优化控制理论构造其伴随方程, 导出相关的伴随方程和 J 关于控制变量 n 的梯度表达式。

(1) 线性化 首先导出控制方程的切线性形式。对式 (1) 取变分, 可得二维浅水方程的切线性形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial t} + \frac{\partial G(U)}{\partial t} = B(U) \quad (7)$$

$$\text{对代价函数式 (6) 取变分, 可得 } J = \int_0^T (U - U^{obs})^2 dt + (n - n^b)^2, \quad n \quad (8)$$

其中, \int 表示在时间 $(0, T)$ 上内积。

(2) 伴随方程 引进二维浅水方程的伴随变量 U^* , 与切线性式 (7) 作内积, 可得

$$\int_0^T U^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U^* \frac{\partial F}{\partial x} + U^* \frac{\partial G}{\partial y} \right) dt = \int_0^T U^* B dt \quad (9)$$

利用分部积分, 经一系列的转换, 代入相应的边界条件和初始条件, 可得二维浅水方程的伴随方程:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial F^T}{\partial U} \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial G^T}{\partial U} \frac{\partial U^*}{\partial y} = - \frac{\partial B^T}{\partial U} U^* + (U - U^{obs}) \quad (10)$$

具有相应的终端(初始)条件 $U^*|_{t=T} = (0, 0, 0)^T$ 和边界条件 $U^*|_{\Gamma} = 0$ 。其中, 伴随方程的系数矩阵:

$$\frac{\partial F^T}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & -u^2 + c^2 & -uv \\ 1 & 2u & v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial G^T}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & -uv & -v^2 + c^2 \\ 0 & v & 0 \\ 1 & u & 2v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial B^T}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & gS_{0x} + \frac{7}{3}gS_{fx} & gS_{0y} + \frac{7}{3}gS_{fy} \\ 0 & -gS_{fx} \frac{2u^2 + v^2}{u(u^2 + v^2)} & -gS_{fy} \frac{u}{u^2 + v^2} \\ 0 & -gS_{fx} \frac{v}{u^2 + v^2} & -gS_{fy} \frac{u^2 + 2v^2}{v(u^2 + v^2)} \end{pmatrix}$$

同时, 可得代价函数对糙率的梯度:
$$\frac{\partial J}{\partial n} = - \int_0^T \frac{\partial B^T}{\partial n} U^* dt + (n - n^b) \quad (11)$$

其中

$$\frac{\partial B^T}{\partial n} = \left[0, -\frac{2}{n}g hS_{fx}, -\frac{2}{n}g hS_{fy} \right]$$

伴随方程的引入可显著地减少计算代价函数关于控制参数(糙率)梯度的花费, 通过沿时间正向积分二维浅水方程和时间反向积分其伴随方程各一次, 即可求得代价函数的梯度, 从而使得水力学模型的控制计算在当前计算条件下得以实现。

(3) 控制系统及其求解 原式(1), 伴随式(10)和相应的初始、边界条件构成了双向的积分系统。当代价函数对糙率的梯度为零, 即 $\partial J / \partial n = 0$ 时, 得到一个糙率参数最优的控制系统。对于这样的最优控制系统的求解, 通常要用迭代法。本文采用拟牛顿最速下降算法解该控制系统。计算时, 首先利用糙率的初始猜测值先前向积分(时间正向)二维浅水方程, 得到模拟时段内的各个状态变量; 接着, 向后积分(时间逆向)伴随方程得到伴随变量的解, 从而求出代价函数对糙率的梯度; 然后, 利用拟牛顿算法求得新的糙率估计值, 如果不满足收敛标准, 则用新糙率值进入下一循环过程; 直至获得满足收敛准则的最优糙率参数。

2.3 数值方法

数值离散涉及到原二维浅水方程组及其伴随方程组的离散。原始浅水方程组应用非结构网格有限体积法求解。时间为一阶显格式, 空间离散则采用高分辨率的 HLLC 算法^[4]。对于伴随方程组离散, 可以有两种途径, 一类方法是直接离散伴随方程; 另一类则是在原方程数值程序代码基础上, 先写出相应的切线性代码, 再写出对应的伴随代码。鉴于水力学模型代码需要对特殊水流进行必要的特殊处理, 如漫滩和露滩模拟等, 为了更好地保持伴随模式与实际的数值代码相对应, 本文选择后一种方法, 也推荐这一方法。但是这种方法工作量相当大, 本文利用了自动微分工具 Tapenade^[5]生成基础代码, 然后进一步优化代码以适应实际计算的要求。

最小化代价函数应用拟牛顿法^[6]迭代求解。收敛准则设定为相对梯度值小于某一小值, 即

$$\frac{J}{J_0} \quad (12)$$

3 数值实验

在验证模型自动率定糙率参数的性能时, 为避免实际情况可能带来的其它影响因素, 可以采用所谓的孪生实验, 即设定准确参数, 利用同一模型生成观测数据, 再假设参数未知进行识别实验。在实际问题中, 观测点相对模型的状态变量维数而言非常之少。为了降低不适定性问题的自由度, 加速优化问题的收敛, 按计算区域

的过流性质分块给定不同的糙率参数，而不是设定每个网格点具有不同的糙率，这也是实际问题切实可行的方法。该部分首先以恒定流情况下的常数糙率进行率定；然后，以非恒定水流为例，研究不同区块随水深变化的糙率。为了便于数值分析和比较，以下的数值实验并没有包含代价函数中的正则项，但是正则项对于实际的应用，尤其是观测数据不够多时的糙率参数自动率定是非常必要的。此外，关于变糙率参数的实验，还增加了一个控制变量，由于变糙率形式多样，为简便起见，并未在前面伴随方程推导中列出。

3.1 计算实例

本文算例为一长为 2 km 的复式河道，主槽为 100 m，两侧各有 450 m 河漫滩。计算区域共分成 9 块，不同区块具有不同糙率特征，见图 1。计算网格由 2 014 个节点，1 924 个单元构成。地形坡度主槽和河漫滩统一取 1/1 000，河漫滩高程较主槽高出 2.50 m(在 $x = 0$ 处，主槽高程为 -2.50 m)。选取 9 个观测点，假设从这些观测点可以获取水深和流速值作为观测数据，它们分别位于各区块的中心，以代表该区块的水流特征。

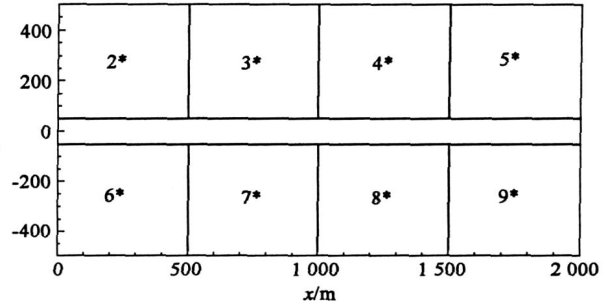


图1 计算案例及观测点分布

Fig.1 Study case and distributions of gauge positions

3.2 分布式常数糙率率定

首先设定准确的糙率参数(各区块的值分布见表 1)，

表1 常数糙率率定

Table 1 Calibration experiments of time-independent Manning roughness coefficients

区 块	真 值	初估值	优化(1)	优化(2)	优化(3)
1	0.018		0.018	0.0183	0.018
2	0.030		0.030	0.0302	0.030
3	0.040		0.040	0.0418	0.040
4	0.050		0.050	0.0448	0.050
5	0.020	0.01	0.020	0.0229	0.020
6	0.045		0.045	0.0360	0.045
7	0.025		0.025	0.0192	0.025
8	0.055		0.055	0.0505	0.055
9	0.035		0.035	0.0368	0.035

注:优化糙率(1)、(2)、(3)分别表示观测数据对应为水位和流速可得,仅有水位可得以及仅有流速可得的工况。为了做比较,优化结果有效数位增加一位(表2同)。

计算得到水位坡降为 1/2 000 的恒定流的流态(在 $x = 0$ 处,主槽水位为 4.50 m),并提取 9 个观测点的水位和流速值作为糙率自动率定时的观测数据。然后,假设一个糙率的猜测值,利用可得观测进行自动率定。针对不同观测,设计 3 个率定实验方案: 水位和流速观测值均可得; 仅有水位可得;

仅有流速可得。收敛限值取为 $\epsilon = 10^{-4}$, 方案 1、2 均在 20 步迭代内收敛, 方案 3 则需 40 步才收敛。在同一收敛标准下, 流速可得的观测都能快速成功地识别出相应的糙率参数, 但是仅有水位观测数据可得的却不是那么成功。在流速观测可得的方案中, 代

价函数对糙率的梯度范数比仅有水位观测可得的方案要高出几个数量级, 这说明流速对糙率相对较为敏感。

3.3 分布式变糙率率定

同 3.2 节, 先用实际糙率参数计算得到观测值; 然后再进行利用自动率定糙率的实验。不同的是, 该节考虑非恒定流, 而且糙率随水深变化。在河道浅滩地, 受湿地植物的影响, 糙率较大, 而且随水深变化显著, 给定固定的参数常常不能如实地反映实际的阻力特征。研究者给出了许多该类问题的阻力计算公式, 其中, 以水深和糙率指数关系形式的, 在二维水流数值计算中较为简单实用。公式如下:

$$n = n_r \left(\frac{h_r}{h} \right) \tag{13}$$

式中 n_r 下标 r 表示参照值; n 为指数, 随实际情况而定^[7]。

按照式(3), 参照水深统一取为 0.5 m, 参照糙率和指数 n_r 列于表 2 中; 上游边界给定水位过程 $Z_{up} = 1.2 - \cos\left(\frac{t}{3600}\right)$, $t \in [0, 3600]$, 下游给定无反射边界条件。模拟时段 3 600 s, 每隔 30 s 提取 9 个点的水位和流速作为观

测数据。

接着,利用观测数据进行糙率的自动率定实验。给定参照水深,设计了 3 组共 9 个率定实验,每一组按不同的可得观测数据(水位流速均可得、仅水位可得和仅流速可得)各含 3 个实验方案: 第一组,同时假设糙率 n 和指数 ζ 都是未知的,需要率定得到; 第二组,仅参照糙率未知,指数关系已知; 第三组,仅指数未知,参照糙率已知。

对该非恒定流的糙率识别,将收敛限值取为 $\epsilon = 10^{-5}$ 。所有三组问题均能收敛,和 2.1 节恒定流实验不同,仅有水位的实验也能准确地识别出参照糙率及其指数参数。但是仅有水位观测数据的一组实验与含流速观测数据的相比,迭代至收敛所需的步数显著增大。因为流速测量比水位测量来得更为快速,所以这点对于如湖泊、河口等大面积水体模拟的实际应用来说是非常有利的。为简化起见,只列出有流速观测得到的结果,见表 2。

表 2 随水深变化糙率率定

Table 2 Calibration experiments of time-dependent Manning roughness coefficients

区块	真 值		初始猜测		第一组		第二组	第三组
	n	ζ	n	ζ	n	ζ	n	ζ
1	0.0180	0.1670			0.0180	0.1660	0.0180	0.1670
2	0.0300	0.3330			0.0300	0.3329	0.0300	0.3332
3	0.0400	0.5000			0.0400	0.4996	0.0400	0.5002
4	0.0500	0.6000			0.0500	0.6002	0.0500	0.6002
5	0.0200	0.1670	0.0100	0.0330	0.0200	0.1660	0.0200	0.1672
6	0.0450	0.7000			0.0450	0.6999	0.0450	0.6999
7	0.0250	0.8000			0.0250	0.8001	0.0250	0.7999
8	0.0550	0.9000			0.0550	0.8994	0.0550	0.8999
9	0.0350	0.4000			0.0349	0.3994	0.0350	0.3999

最优化的收敛过程也因率定问题所提供的观测数据和自由度而异,见图 2。仅有水位观测数据可得的与流速观测可得的问题相比,迭代至收敛所需的迭代数要长;同时率定参照糙率和指数关系的问题与单参数的率定相比,收敛度速度变缓,迭代数显著增大。第二、三组中对单参数进行自动率定的问题能很快在三四十步之内收敛,然而,对于第一组同时识别参照糙率及其指数关系的问题,其迭代至收敛则需几百步。这是由于识别参数问题的自由度提高使得寻找最优解的过程大大趋慢所致。图 2 中给出了第一组 3 个不同观测下的实验方案以及第二、三组实验中仅有流速观测可得的代价函数的下降过程。其中,“only n ”和“only ζ ”分别对应第二、三组中的流速观测方案。“ n & ζ with Obs. h & u ”、“ n & ζ with Obs. h ”和“ n & ζ with Obs. u ”分别表示在水位和流速、仅有水位和仅有流速观测可得情况下的 3 个实验方案。

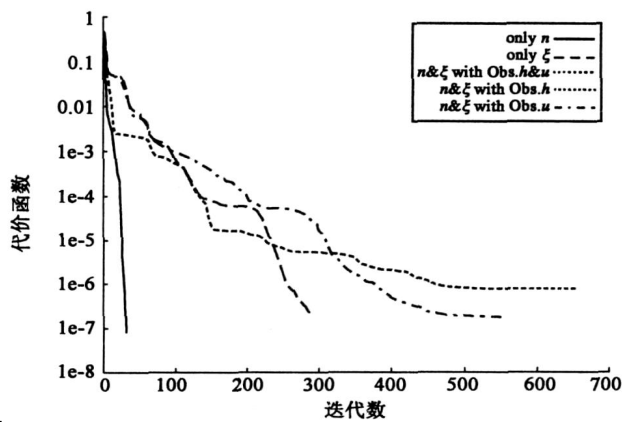


图 2 代价函数收敛过程

Fig. 2 Convergent processes of calibration experiments

4 结 论

利用该方法导出了二维浅水方程的伴随模式,并实现了二维水力学模型分布式糙率参数的优化计算。结合实际应用的可操作性,分区块设定糙率参数,根据可能的观测数据,如水位和流速可得的情况,开展了糙率自动率定研究。研究表明:

(1) 在观测数据包含足够的信息时,利用最优化控制理论能成功地自动率定恒定流态和非恒定流态下的糙率参数。

(2) 从自动率定实验可以发现：和水位相比，流速对糙率参数更加敏感。尤其对于恒定流而言，只给定流速即可快速地识别出糙率参数。

(3) 当糙率随水深变化时，模型能够成功地将糙率随水深的变化关系式识别出来，这对于实际应用是非常有用的。但是也可以明显地看到，当问题自由度增大时，迭代收敛过程也显著变慢。对于长历时的预测问题，相应的计算代价也变得巨大。因此，笔者建议对需要考虑变糙率的洪水预测问题，可利用在非洪水期的准恒定流率定出参照糙率。然后，利用多次洪水过程率定出相应的糙率关系式中的指数参数用于预测。

参考文献：

- [1] 汪德燿. 计算水力学理论与应用[M]. 南京:河海大学出版社, 1989. (WANG De-guan. Theory and application of computational hydraulics [M]. Nanjing: Hohai University Press, 1989. (in Chinese))
- [2] 谭维炎. 计算浅水动力学——有限体积法的应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1998. (TAN Wei-yan. Computational shallow water hydrodynamics-Application of finite volume method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998. (in Chinese))
- [3] LIONS J L. Optimal control of systems governed by partial differential equations[M]. Berlin:Springer-Verlag, 1971.
- [4] TORO E F. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows[M]. Chichester: J Wiley and Sons, 2001.
- [5] HASCOËTL, PASCUAL V. Tapenade 2.1 user 's guide[R]. Berlin: Technical Report RT-0300, INRIA, 2004.
- [6] GILBERT J C, LEMARÉCHAL C. Some numerical experiments with variable storage quasi-Newton algorithms[J]. Mathematical programming, 1989, 45:407 - 435.
- [7] TSIHRINTZIS V A, MADIEDO E E. Hydraulic resistance determination in marsh wetlands[J]. Water resources management, 2000, 14: 285 - 309.

Calibration of Manning roughness coefficients in two-dimensional shallow water flows using optimal control theory^{*}

LAI Xi-jun, JIANG Jia-hu, HUANG Qun

(State Key Laboratory of Lake Science and Environment, Nanjing Institute of Geography & Limnology,

Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008, China)

Abstract : The optimal Manning roughness coefficients (n) control system of two-dimensional shallow water equations are first derived by using the optimal control theory for the partial differential equations. Then, the algorithm for automatically calibrating distributed n is implemented based on the framework of the unstructured finite volume methods. Considering the operational application, the n is not defined in each cell, but in each land cover block. Two conditions are investigated in our calibration experiments. One is the time-independent n identification for steady flows, and the other is the time-dependent n , which has fixed reference value and varies with water depth as given empiric relationship for unsteady flows. In both groups experiments, it is found that the n can be successfully calibrated using enough observations. Also, the functional relationship between referencen and water depth can be identified. But, the iteration number for the identification of the functional relationship increases largely because of larger freedom of control variables. Finally, the strategy for calibration are suggested in the modeling flood event, in which varied n is required to be considered.

Key words : Manning roughness coefficients; parameter identification; optimal control; shallow water equations

* The study is financially supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50709034 and 40571028).