

# 基于连续分形理论的土壤非饱和水力传导度的研究

王 康<sup>1</sup>, 张仁铎<sup>1,2</sup>, 王富庆<sup>1</sup>

(1. 武汉大学水利水电学院, 湖北 武汉 430072; 2. University of Wyoming, Laramie, WY 87071-3354, USA)

**摘要:** 土壤的孔隙是具有连续分形性质的物理结构, 根据土壤孔隙分形结构建立了非饱和水力传导度模型。模型包括综合系数、分形维数和临界体积比 3 个参数, 综合系数为不同土壤基质势对应的非饱和水力传导度与饱和传导度之间的水力联系, 与土壤质地有关; 分形维数反映土壤孔隙结构对于非饱和水力传导度的作用, 土壤不同尺寸孔隙之间的连通性则通过临界体积加以描述。模型具有较为明确的物理解释。将模型应用于 5 种不同土壤的结果表明, 所提出的非饱和水力传导度模型具有较好的模拟效果。

**关 键 词:** 连续分形理论; 非饱和水力传导度; 土壤; 孔隙结构

**中图分类号:** S152.72      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-6791(2004)02-0206-05

土壤非饱和水力传导度是土壤水力特性的一个重要参数, 与土壤颗粒粒径、孔隙的分布、孔隙形状以及孔隙的连续性都有密切的联系。较为典型的非饱和水力传导度模型, 如 Van Genuchten 模型, Brook-Corey 模型等<sup>[1]</sup>一定程度上描述了土壤非饱和水力传导度和土壤基质势(或土壤含水率)间的形成规律, 由于非饱和土壤水力性质的复杂性(孔隙结构以及孔隙水流特性), 这类模型往往缺乏明确的物理解释。

随着分形几何理论较为成功的运用于土壤结构特性(土壤团粒结构, 土壤结构分布, 土壤孔隙等)的描述<sup>[2]</sup>, 一些学者在分形几何的基础上对非饱和水力传导度的建模进行了研究。

Toledo 等<sup>[3]</sup>根据分形几何理论和薄层水膜的物理特征, 得出含水率较低情况下的土壤非饱和水力传导度与含水率之间的关系可表示为

$$K(\theta) = K_s \theta^{3/m(3-D_s)} \quad (1)$$

式中  $m$  为与土壤固体和表面液体相互作用的参数( $1 < m < 3$ );  $D_s$  为根据土壤水分特征曲线推求的分形维数。

Rieu 和 Sposito<sup>[4]</sup>根据土壤颗粒尺寸分布提出了非饱和水力传导度模型为

$$K_r = C_r \sum_{j=1}^{n-1} (d_f)_j^2 G^j \quad (2)$$

式中  $C$  为与土壤孔隙构成和流体性质有关的常数;  $(d_f)_j$  为分形结构的垂向孔隙面积;  $G^j$  为衰减系数, 表示非饱和水力传导度随孔隙的减小而降低;  $r$  为不发生碎裂分形的概率值在二维空间的对应值。该模型应用于砂土取得了较好的效果<sup>[5]</sup>。

Crawford<sup>[6]</sup>根据土壤的质量分形维数  $D_m$  以及表征土壤质地结构的均一性和孔隙边缘形状的系数  $\bar{d}$  来描述土壤非饱和水力传导度, 土壤水分特征曲线关系为  $\theta = D_m h^{D_m}$ , 非饱和水力传导度与土壤含水率满足如下关系:

$$K(\theta) = K_s [1/(D_m - 3)]^{1/3} [3 + (D_m/\bar{d}) - D_m] \quad (3)$$

式中  $\alpha < 1$  为待定参数。Fuentes 等<sup>[7, 8]</sup>认为土壤水分特征曲线可以表示为  $\theta = h^{D-3}$ , 据此推导出非饱和水力传导度与土壤含水率之间满足如下关系:

$$K(\theta) = K_s \theta^{2/(3-D)+2D/3} \quad (4)$$

收稿日期: 2002-12-19; 修订日期: 2003-03-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50279038; 50239090)

作者简介: 王 康(1975-), 男, 河北霸州人, 武汉大学讲师, 博士, 主要从事节水灌溉理论和土壤水运动理论研究。

以上的非饱和和水力传导度分形模型基本上分为两种情况：式(4)为根据土壤水分特征曲线的分形解释，将土壤水分特征曲线中的分形维数替换原非饱和水力传导度模型中所对应的参数所得。这类模型结构较为简单，易于求解，但水力传导度则缺乏物理解释；式(3)将 Poiseuille 定律与土壤颗粒粒径与孔隙结构的分形性质相结合，从不同的尺度出发推导非饱和水力传导度，物理意义较为明确，但模型结构较为复杂，涉及到许多难于确定的参数，模型的实际应用也较为困难。

非饱和水力传导度与土壤质地、孔隙的分布及形状以及不同尺寸孔隙之间的连通性等因素有关，本文认为土壤的孔隙是具有连续分形性质的物理结构，应综合考虑影响非饱和水力传导度的各种物理因素，建立机理模型。

## 1 模型建立

### 1.1 多孔介质的连续分形模型

Piiefei 和 Avnir<sup>[9]</sup>指出，多孔介质的孔隙尺寸分布满足：

$$dV(>r)/dr = r^{E-D-1} \quad (5)$$

式中  $V(>r)$  为多孔介质中尺寸大于  $r$  的孔隙体积； $D$  为孔隙结构的分形维数； $E$  为 Euclidean 空间维数，式(5)积分得

$$V(>r) = -\frac{1}{E-D} r^{E-D} + V_0 \quad (6)$$

式中  $E=3$ ； $\phi$  为比例系数； $V_0$  为积分常数，可称为“剩余体积”。令最大孔隙尺度为  $r_m$ ，最小孔隙尺度为  $r_0$ ，对于三维空间，由式(6)可得<sup>[10]</sup>

$$1 - (r_0/r_m)^{3-D} = \phi \quad (7)$$

式中  $\phi$  为土壤孔隙率。Perfect 等的研究<sup>[10, 11]</sup>表明，尺寸为  $r$  的孔隙个数的概率可表示为

$$P(r_i) = r_i^{-D} \quad (8)$$

则孔隙尺寸连续分布情况下， $r$  与  $r+dr$  之间孔隙体积可表示为<sup>[12]</sup>

$$d\phi = r^3 r^{1-D} dr \quad (9)$$

设  $\phi$  为式(9)两边的比例系数，式(9)两边积分得

$$\int_{r_0}^{r_m} r^3 r^{1-D} dr = \frac{r_m^{3-D} - r_0^{3-D}}{3-D} = \phi \quad (10)$$

将式(7)代入式(10)，求解得

$$= \frac{3-D}{r_m^{3-D}} \quad (11)$$

因此土壤孔隙的连续分形模型可表示为

$$d\phi = r^3 \frac{3-D}{r_m^{3-D}} r^{1-D} dr \quad (12)$$

### 1.2 非饱和水力传导度模型

认为土壤最大的土壤孔隙  $r_m$  与某一个临界尺寸的孔隙土壤孔隙  $r_c$  之间相互联系，形成水流运动的通道，水流在尺寸  $r_m$  与  $r_c$  之间的相互联系的通道间流动时有最大的水力传导度， $r_c$  即土壤水流动的控制尺寸，控制土壤水流动能够达到最大的流速<sup>[12]</sup>。将  $r_c$  称为临界尺度，尺寸大于  $r_c$  的孔隙体积为临界体积  $V_{cm}$ ，饱和条件下，对式(12)进行积分，得饱和临界体积比  $V_{cm}$  为

$$\left[ \frac{3-D}{r_m^{3-D}} \right] \int_{r_{cm}}^{r_m} r^3 r^{1-D} dr = V_{cm} \quad (13)$$

求解得饱和情况下临界尺寸为

$$r_{cm} = r_m [1 - V_{cm}]^{1/(3-D)} \quad (14)$$

非饱和情况下, 我们假定尺寸大于  $r_u$  的孔隙中无水, 而小于  $r_u$  的孔隙完全被水所充满, 则对于任意饱和度  $S$  情况下

$$S = \left( \frac{1}{\phi} \right) \left( \frac{3-D}{r_m^{3-D}} \right) \int_{r_0}^{r_u} r^3 r^{-D-1} dr = \frac{1}{\phi} \left[ \frac{r_u^{3-D}}{r_m^{3-D}} - \frac{r_0^{3-D}}{r_m^{3-D}} \right] \quad (15)$$

将式(7)代入式(15)可得

$$r_u = [S r_m^{3-D} + (1-S) r_0^{3-D}]^{1/(3-D)} \quad (16)$$

由于孔隙分形结构的自相似性, 认为对于任意饱和度  $S$  情况下  $c$  不变, 任意饱和度情况下的临界体积比为

$$c = \left( \frac{3-D}{r_m^{3-D}} \right) \int_{r_c}^{r_u} r^3 r^{-D} dr = \left( \frac{r_u}{r_m} \right)^{3-D} - \left( \frac{r_c}{r_m} \right)^{3-D} \quad (17)$$

将式(16)代入式(17), 得

$$c = \left[ \frac{S r_m^{3-D} + (1-S) r_0^{3-D}}{r_m^{3-D}} \right] - \left[ \frac{r_c}{r_m} \right]^{3-D} = \left[ S + (1-S) \left( \frac{r_0}{r_m} \right)^{3-D} \right] - \left[ \frac{r_c}{r_m} \right]^{3-D} \quad (18)$$

将式(7)代入, 得  $r_c = r_m (1 - c)^{1/(3-D)} \left[ 1 - \phi \frac{1-S}{1-c} \right]^{1/(3-D)}$  (19)

将式(14)代入, 则任意饱和度所对应的临界尺度满足如下关系:

$$r_c(S) = r_{cm} \left[ 1 - \phi \frac{1-S}{1-c} \right]^{1/(3-D)} \quad (20)$$

非饱和水力传导度是土壤颗粒径、孔隙分布及连续性及形状等因素综合作用的结果, 根据以上分析, 结合 Poiseuille 定律<sup>[8]</sup>, 可知

$$K/K_s = r_c(S)^3 / r_{cm}^3 \quad (21)$$

因此, 得到非饱和水力传导度的连续分形模型

$$K = K_s \left[ 1 - \phi \frac{1-S}{1-c} \right]^{3/(3-D)} \quad (22)$$

根据 Tyler 和 Wheatcraft<sup>[13]</sup>的研究, 饱和度  $S$  与土壤基质势之间的关系为

$$S = \left( h/h_a \right)^{3-D} \quad (23)$$

式中  $\alpha$  为反映非饱和水力传导度与饱和水力传导度之间水力联系的系数;  $h_a$  为土壤进气时的基质势;  $K_s$  为饱和水力传导度;  $\phi$  为土壤孔隙率。式(22)和式(23)即为连续分形条件下的非饱和水力传导度模型。

## 2 试验与结果分析

为了研究非饱和水力传导度的连续分形模型, 以及对于模型参数的取值进行分析, 分别对4个地点所进行的土壤取样的非饱和水力传导度进行了测试, 试验于1999-2002年间在武汉大学农田水利与水环境实验室进行。另外, 将

Wessolek 等<sup>[14]</sup>所公布的土壤水分特征曲线和非饱和水力传导度资料用于模型的适用分析及参数求解。5种土壤拟合非饱和水力传导度和实测值的比较如图1所示。根据土壤水分特征曲线计算了土壤孔隙的分形维数<sup>[15]</sup>, 采用方程(22)的形式, 根据以上5种土壤非饱和水力传导度实测资料(表1), 拟合了系数  $\alpha$  及临界体积比  $c$ 。

表1 试验土壤水力参数

Table 1 Physical properties of the selected soils

样本号	土壤质地	孔隙率	容重 (g cm <sup>-3</sup> )	饱和传导度 (cm s <sup>-1</sup> )	取样地点
1	粉砂土	0.44	1.38	0.024	湖北荆州
2	壤质粘土	0.396	1.44	4.86 × 10 <sup>-6</sup>	安徽蚌埠
3	壤土	0.40	1.38	0.006	北京通县
4	粉煤灰*	0.52	1.05	0.0015	江苏南京
5	砂壤土	0.36	1.37	0.000401	Ohlendorf, Germany

注 \* 为扰动土, 其他都为原状土。

试验1~4采用短柱法<sup>[15]</sup>测定土壤水分特征曲线及非饱和水力传导度。

表2为5种土样的实测非饱和水力传导度资料拟合求解所得的参数, 图1为计算非饱和水力传导度计算值和实测

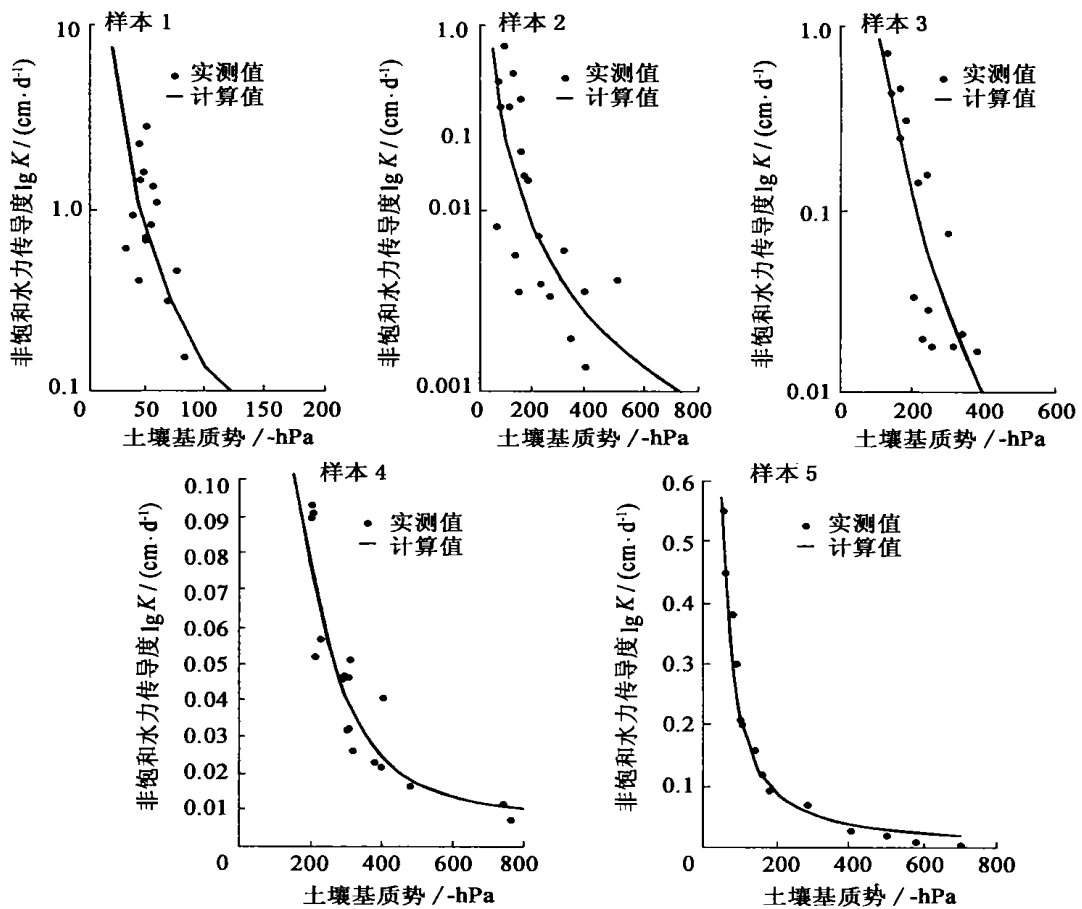


图 1 不同土质非饱和水力传导度模拟效果的比较

Fig.1 Comparison of  $K$  measured and estimated by the model for five soils

值的比较，可以看出，模型能够较好地模拟不同土壤质地的土壤非饱和水力传导度与土壤基质势的函数关系，表明模型的结构是较为合适的。模型包括 3 个参数，综合系数  $\alpha$ ，分形维数  $D$  和临界体积比  $\epsilon_c$ ，从模型的推导可以看出，综合系数反映不同土壤非饱和水力传导度随基质势的增大而下降的程度。试验结果则表明，土壤的砂性越重，饱和情况下的水力传导度越大，而非饱和情况下，水力传导度较饱和情况有明显的下降，如样本 1 粉砂土，土壤砂性越重， $\alpha$  就越小；反之，土壤粘性越重，则  $\alpha$  越大。孔隙分形维数  $D$  根据土壤水分特征曲线推求，反映土壤孔隙结构分布对于非饱和水力传导度的影响。临界体积比  $\epsilon_c$  则为孔隙之间相互联系对于某种饱和度情况下水力传导度所能达到的最大值的限制。

表 2 不同土壤非饱和水力传导度参数

Table 2 Estimated hydraulic parameters for five soils

样本号	综合系数	分形维数 $D$	临界体积比 $\epsilon_c$
1	0.0064	2.088	0.54
2	0.9672	2.877	0.52
3	0.1740	2.752	0.64
4	0.0082	2.220	0.39
5	0.0130	2.761	0.41

### 3 结 论

本文将土壤作为一个连续分形体，土壤水分的流动受到孔隙大小，孔隙的结构形状以及不同尺寸孔隙之间的联系等多种因素制约。非饱和水力传导度连续分形模型的建立则充分的考虑了以上影响水力传导度的各种因素，具有较为明确的物理意义，模型结构也较为简单，易于求解。

模型包括 3 个参数，土样分析表明，综合系数为不同土壤基质势对应的非饱和水力传导度与饱和传导度之

间的水力联系, 随土壤粘性的增加而增大; 分形维数  $D$  反映土壤孔隙结构(尺寸及分布)对于非饱和水力传导度的影响, 而土壤不同尺寸孔隙之间的连通性则通过临界体积加以描述。将模型应用于 5 种土壤的结果表明, 模型能够较好的用于不同土壤质地非饱和水力传导的模拟。

由于试验条件和方法的限制, 本文仅对于模型的物理构成以及计算效果进行了分析。模型中 3 个参数, 综合系数  $\alpha$ , 分形维数  $D$  和临界体积比  $\theta_c$  之间的关系, 以及临界体积比与土壤物理构成之间的关系都需要进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] Zhuang J, Nakayama K, Yu C R. Predicting unsaturated hydraulic conductivity of soil based on some basic soil properties[J]. *Soil Till Res*, 2001, 59:143 - 154.
- [2] Gmenez D, Perfect E, Rawls W J. Fractal models for predicting soil hydraulic properties: a review[J]. *Engin Geo*, 1997, 48:161 - 183.
- [3] Toledo P G, Novy R A, Davis H T. Hydraulic conductivity of porous media at low water content[J]. *Soil Sci Soc Am J*, 1990, 54:673 - 679.
- [4] Rieu M, Sposito G. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: Theory[J]. *Soil Sci Soc Am J*, 1991, 55:1231 - 1238.
- [5] Rieu M, Sposito G. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties: Application[J]. *Soil Sci Soc Am J*, 1991, 55:1239 - 1244.
- [6] Crawford J W. The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil[J]. *Eur J Soil Sci*, 1994, 45:493 - 501.
- [7] Fuentes D, Vanclin M, Parlange J. A note on the soil-water conductivity of a fractal soil[J]. *Transp Porous Media*, 1996, 23:31 - 36.
- [8] Baveye P, Parlange J, Stewart B A. Fractals in soil science[M]. CRC Press, 1997.
- [9] Pfeifei P, Avnir D. Chemistry in non-integer dimensions between two and three: Fractal theory of heterogeneous surfaces[J]. *J Chem Phys*, 1983, 79:3358 - 3565.
- [10] Perfect E, Rasiah V, Kay B D. Fractal dimensions of soil aggregate size distributions calculated by number and mass[J]. *Soil Sci Soc Am J*, 1992, 56:1407 - 1409.
- [11] Perfect E, Diaz-Zorita M, Grove J H. A pre-fractal model for predicting soil fragment mass size distributions[J]. *Soil Till Res*, 2002, 64:79 - 90.
- [12] Hunt A G, Gee G W. Application of critical path Analysis to fractal porous media: comparison with examples from the Hanford site[J]. *Adv Water Res*, 2002, 25: 129 - 146.
- [13] Tyler S W, Wheatcraft S W. Fractal processes in soil water retention[J]. *Water Resour Res*, 1990, 26:1047 - 1054.
- [14] Wessolek G, Plagge R, Leij F J. Analysing problems in describing field and laboratory measured soil hydraulic properties[J]. *Geodema*, 1994, 64:93 - 100.
- [15] 沈荣开, 张瑜芳, 王富庆. 确定土壤水分运动参数的短柱试验分析法[J]. *武汉水利电力大学学报*, 1996, 29(1):7 - 10.

## Continuum fractal model for unsaturated soil hydraulic conductivity\*

WANG Kang<sup>1</sup>, ZHANG Ren-duo<sup>1,2</sup>, WANG Fu-qing<sup>1</sup>

(1. Institute of Water Research and Hydraulic Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. University of Wyoming, Laramie, WY 87071 - 3354, USA)

**Abstract:** A model for the unsaturated soil hydraulic conductivity is established based on an assumption that the soil can be represented as a continuum fractal porous medium. The model contains three physical parameters: a coefficient  $\alpha$ , the fractal dimension  $D$  and the critical volume fraction  $\theta_c$ . The saturated and unsaturated hydraulic conductivities are connected by the parameter  $\alpha$ . The fractal dimension ( $D$ ) represents the soil porous structure and the critical volume fraction ( $\theta_c$ ) which accounts for the differential porosity from the smallest pore size for continuous flow to the largest pore size in the soil. The unsaturated soil hydraulic conductivity estimated by the model is compared with the experimental data of various soils.

**Key words:** continuum fractal; unsaturated soil hydraulic conductivity; soil; porous structure

\* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 50279038 and No. 50239090).