

PIV 技术的几种实现方法

孙鹤泉, 沈永明, 王永学, 康海贵, 李广伟

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: PIV 技术是一种基于流场图像互相关分析的二维流场非接触式测试技术。在介绍利用 Fourier 变换的互相关特性及其快速算法实现 PIV 技术的基础上, 介绍了可提高分析效率的实序列 Fourier 变换的实现方法, 并进而提出了一种更高效的基于 Hartley 变换的分析法, 给出了分离式内核的 Hartley 变换互相关特性的明确表达式。从算法复杂性理论与实际分析时间两方面对 3 种方法进行的比较, 充分说明了 Hartley 变换在 PIV 技术应用中的优越性。

关键词: 粒子图像测速法; 互相关分析; Fourier 变换; Hartley 变换

中图分类号: TB9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2004)01-0105-04

1 PIV 技术简介

PIV 技术^[1,2](粒子图像测速法)是一种基于流场图像互相关分析的非接触式二维流场测量技术, 能够无扰动、精确有效地测量二维流速分布。作为 PIV 技术核心的流场图像分析法目前主要采用二维快速 Fourier 变换实现互相关函数的计算, 并利用速度的基本定义, 通过测量水质点在已知时间间隔内的位移实现对水质点速度测量; 对测量平面上的多个水质点进行跟踪、测量, 就可实现流速分布的二维测量。

利用 PIV 技术测量流场时, 需在流场中散播比重适当且跟随性好的示踪粒子, 由示踪粒子的运动来反映水质点的运动; 并用自然光或激光对所测平面进行照射, 形成光照平面, 使用 CCD 等摄像设备获得示踪粒子的图像, 图 1 为 PIV 实验示意图。对得到的 PIV 图像序列进行互相关分析, 就能获得流场的二维速度矢量分布。

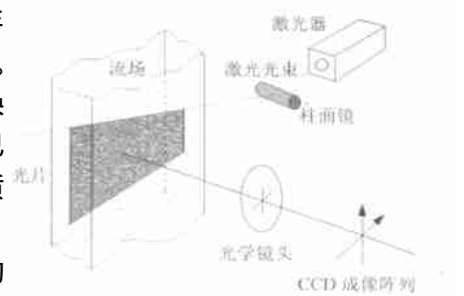


图 1 PIV 实验示意图

Fig. 1 Sketch of PIV experiment

2 PIV 的 Fourier 实现

如果 t_1 时刻的流场图像表示为 $I_1(x, y) = I(x, y) + n_1(x, y)$; 那么, 在时间间隔 t 相对较小的情况下, $t_2 = t_1 + t$ 时刻的流场图像就可表示为 $I_2(x, y) = I(x + x, y + y) + n_2(x, y)$; $n_1(x, y)$ 、 $n_2(x, y)$ 为随机噪声。计算 $I_1(x, y)$ 与 $I_2(x, y)$ 的互相关函数 $r_{12}(x, y)$, 并假定噪声 $n_1(x, y)$ 、 $n_2(x, y)$ 与有效图像函数 $I(x, y)$ 不相关, 可得

$$r_{12}(x, y) = \frac{\int I_1(x, y) I_2(x + x, y + y) dx dy}{\int I(x, y) I(x + x, y + y) dx dy} \quad (1)$$

收稿日期: 2002-11-11; 修订日期: 2003-02-20

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (50125924); 国家自然科学基金重点资助项目 (10332050); 国家自然科学基金资助项目 (50125924); 武器装备预研基金资助项目 (5144301010JW0901)

作者简介: 孙鹤泉(1973-), 男, 山东莱州人, 大连理工大学讲师, 博士研究生, 主要从事海洋环境和工程中信息技术及非接触测量方法的应用研究。E-mail: hqsun@dlut.edu.cn

$I(x, y)$ 的自相关函数为: $r(x, y) = \iint I(x, y) I(x+x, y+y) dx dy$ (2)

从而, 式(1)可转化为: $r_{12}(x, y) = r(x+x, y+y)$ 。自相关函数是偶函数, 并在原点取得最大值, 即 $r(x, y) = r(0, 0)$, 使得如下不等式成立:

$$r_{12}(x, y) \leq r_{12}(0, 0) \quad (3)$$

由此可知, 互相关函数的最大值所在位置对应流场间的相对位移, 即水质点在时刻 t_1 与 t_2 之间的位移, 进而可计算出流场在 t 内的速度。

在算法实现上, 为了提高运算效率, 可采用二维快速 Fourier 变换实现互相关函数的计算。令 $I_1(x, y)$ 、 $I_2(x, y)$ 与 $r_{12}(x, y)$ 的 Fourier 变换分别为 $I_{F1}(u, v)$ 、 $I_{F2}(u, v)$ 与 $R_F(u, v)$, 则式(1)对应的频域表达式为

$$R_F(u, v) = I_{F1}^*(u, v) \times I_{F2}(u, v) \quad (4)$$

其中, $I_{F1}^*(u, v)$ 为 $I_{F1}(u, v)$ 的共轭。

由式(4)可知, 利用 Fourier 变换的互相关性质和快速算法 FFT, 进行两次 Fourier 变换和一次逆变换, 就可计算出互相关函数 $r_{12}(x, y)$, 不但提高了计算效率, 而且避免了复杂的积分运算。

流场图像是实序列, 而其 Fourier 变换是复序列, 导致变换过程中存在很大的冗余, 仍会限制存储效率与运算速度, 可利用实序列 Fourier 变换的 Hermitian 对称性进一步提高分析效率。

构造一个复函数 $z(x, y) = I_1(x, y) + j I_2(x, y)$, 该函数对应的 Fourier 变换为 $Z(u, v) = \text{Re}(u, v) + j \text{Im}(u, v)$, 那么, 以下关系成立:

$$\begin{aligned} I_{F1}(u, v) &= \frac{\text{Re}(u, v) + \text{Re}(-u, -v)}{2} + j \frac{\text{Im}(u, v) - \text{Im}(-u, -v)}{2} \\ I_{F2}(u, v) &= \frac{\text{Im}(u, v) + \text{Im}(-u, -v)}{2} - j \frac{\text{Re}(u, v) - \text{Re}(-u, -v)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

与直接采用复 Fourier 变换法相比, 用式(5)分析 PIV 图像, 可减少一次变换运算, 节省约 1/3 的计算量。

3 基于 Hartley 变换的 PIV 方法

Hartley 变换是类似于 Fourier 变换的积分变换, 其正反变换的积分核相同, 具有 Fourier 变换的大部分特性, 且实序列的 Hartley 变换仍是实序列, 避免了变换过程中的冗余性, 能成倍地节约内存空间。另外, Hartley 变换的快速实现 FHT 可采用 FFT 的结构形式, 能进一步提高运算速度, 更适合于应用于批量 PIV 图像分析。

3.1 一维变换

Hartley 变换^[3,4]及其逆变换的定义为

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{cas}(\omega t) dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \text{cas}(\omega t) d\omega \quad (6)$$

式中 $\text{cas}(\omega t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$ 。定义由 Hartley 变换构造的奇函数与偶函数^[4,5]:

$$H_o(\omega) = \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (8)$$

$$H_e(\omega) = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (9)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = H_e(\omega) - jH_o(\omega) \quad (10)$$

由 Fourier 变换的互相关特性可知:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\tau) dt \xrightarrow{FT} R_F(\omega) = X_F^*(\omega) Y_F(\omega) \quad (11)$$

利用式(10)与式(11)就可容易地推导出 Hartley 变换的互相关特性:

$$R_H(\omega) = X_H(\omega) Y_{Ho}(\omega) + X_H(-\omega) Y_{He}(\omega) \quad (12)$$

式中 $R_H(\cdot)$ 、 $X_H(\cdot)$ 与 $Y_H(\cdot)$ 为 $r_{xy}(\cdot)$ 、 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的 Hartley 变换, 下标 o 、 e 表示由式(9)与式(10)构造的奇函数与偶函数。

3.2 二维变换

与二维 Fourier 变换不同, 二维 Hartley 变换的积分核存在两种选择: $cas(ux + vy)$ 、 $cas(ux)cas(vy)$ 。为了便于快速实现, 选择可分离的第二种形式, 并得到如下的正逆变换表达式^[4,6]

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) cas(ux) cas(vy) dx dy \tag{13}$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v) cas(ux) cas(vy) du dv \tag{14}$$

定义由二维 Hartley 变换构造的奇函数与偶函数^[6]

$$H_o(u, v) = \frac{1}{2} [H(u, v) - H(-u, -v)] \tag{15}$$

$$H_e(u, v) = \frac{1}{2} [H(u, v) + H(-u, -v)] \tag{16}$$

可得二维 Fourier 变换与 Hartley 变换的关系^[6]:

$$F(u, v) = H_e(u, -v) - jH_o(u, v) \tag{17}$$

二维数据 $p(x, y)$ 与 $q(x, y)$ 的互相关函数的表达式为

$$r_{pq}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x + x', y + y') q(x', y') dx' dy' \tag{18}$$

$R_H(u, v)$ 、 $P_H(u, v)$ 与 $Q_H(u, v)$ 分别对应 $r_{pq}(x, y)$ 、 $p(x, y)$ 与 $q(x, y)$ 的二维 Hartley 变换, 可得到二维 Hartley 变换的互相关特性表达式:

$$R_H(u, v) = P_{He}(u, v) Q_{He}(u, v) - P_{Ho}(-u, v) Q_{Ho}(u, -v) + P_{He}(-u, v) Q_{Ho}(u, v) - P_{Ho}(u, v) Q_{He}(u, -v) \tag{19}$$

4 算法复杂性对比

根据文献[7,8]中提供的 FFT 算法与 FHT 算法所需的实数乘法、加法次数的计算公式, 利用 FFT(复)、FFT(实)和 FHT 对大小为 $M \times N$ 的数据进行互相关分析所需的实数乘法、加法分别为 $M_{CF}(M, N)$ 与 $A_{CF}(M, N)$ 、 $M_{CR}(M, N)$ 与 $A_{CR}(M, N)$ 及 $M_{CH}(M, N)$ 与 $A_{CH}(M, N)$:

$$M_{CF}(M, N) = 3MN \log_2(MN) - 14MN + 12(M + N) \tag{20}$$

$$A_{CF}(M, N) = 9MN \log_2(MN) - 16MN + 12(M + N) \tag{21}$$

$$M_{CR}(M, N) = 2MN \log_2(MN) - 8MN + 8(M + N) \tag{22}$$

$$A_{CR}(M, N) = 6MN \log_2(MN) - 6MN + 8(M + N) \tag{23}$$

$$M_{CH}(M, N) = \frac{3}{2} MN \log_2(MN) - 5MN + 6(M + N) \tag{24}$$

$$A_{CH}(M, N) = \frac{9}{2} MN \log_2(MN) - 4MN + 18(M + N) \tag{25}$$

表 1 中列出了上述 3 种方法在计算不同长度的二维互相关函数时所需的计算量。从表中计算量的对比可看出, 利用 FHT 的计算量比 FFT(复)要减少近一半, 从而其计算速度将提高一倍。另外, 在 CPU 主频为 Intel P- 1.7GHz 的 PC 机上, 利用 3 种方法对下载自 <http://piv.vsj.or.jp/piv/image.html> 的流场图像 piv41_1.bmp 与 piv41_2.bmp 进行分析, 都获得了图 2 所示的速度矢量图, 相应的分析时间分别为: 5.741949、4.561032 与 3.192722 s, 从分析时间上进一步反映出 FHT

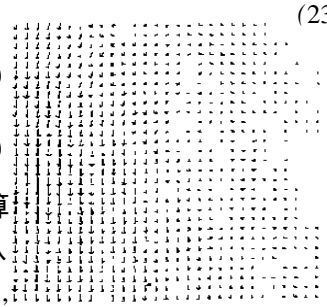


图 2 速度矢量场

Fig.2 Velocity maps

法 PIV 应用中的优越性。

表 1 二维互相关的算法复杂性比较

Table 1 Complexity comparison of the 2-D cross correlation

数据大小	实数乘法次数			实数加法次数		
	FFT (复)	FFT (实)	FHT	FFT (复)	FFT (实)	FHT
32 ×32	17 152	12 800	10 624	76 544	55 808	43 136
64 ×64	91 648	66 560	54 016	378 368	271 360	207 104
128 ×128	461 824	329 728	263 680	1 805 310	1 280 000	9 71 264
256 ×256	2 234 370	1 576 960	1 248 260	8 394 750	5 902 340	4 465 660

5 结 论

本文从 PIV 技术中流场图像的分析原理出发, 给出 PIV 技术的 3 种具体实现方法, 在详细推导了 Hartley 变换与 Fourier 变换的关系的基础上, 给出了 Hartley 变换互相关特性的具体表达式, 并从算法复杂性与分析时间两方面证明了在获得同样结果与精度的情况下, 基于 FHT 的互相关分析的速度比基于 FFT 的算法快了近一倍。研究表明在 PIV 系统中, 应用本文提供的基于 Hartley 变换的互相关算法取代基于 Fourier 变换的算法, 能够成倍地提高计算速度和减少存储内存, 尤其对批量的 PIV 流场图像进行分析时是非常有效的。

参考文献:

- [1] Westerweel J. Fundamentals of digital particle image velocimetry [J]. Measurement Science and Technology, 1997, 8(12): 1379 - 1392.
- [2] 孙鹤泉, 康海贵. DPIV 流场测试技术中的数据[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40(3): 364 - 367.
- [3] Hartley R V L. A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems [J]. Proceeding of the IEEE, Proc IRE, 1942, 30:144 - 150.
- [4] Bracewell R N. Discrete Hartley transform [J]. J Opt Soc Am, 1983, 73(12): 1832 - 1835.
- [5] Saatcilar R, Ergintav S, Canitez N. The use of the Hartley transform in geophysical applications [J]. Geophysics, 1990, 55(11): 1488 - 1495.
- [6] Waston A B, Allen Poirson. Separable two-dimensional discrete Hartley transform [J]. J Opt Soc Am A, 1986, 3(12): 2001 - 2004.
- [7] 曾泳泓. 离散卷积的 W 变换算法[J]. 计算数学, 1995(1): 37 - 46.
- [8] 茅一民. 离散付立叶变换的新算法[J]. 声学学报, 1996, 21(1): 49 - 54.

Introduction of algorithms used in PIV technique^{*}

SUN He-quan, SHEN Yong-ming, WANG Yong-xue, KANG Hai-gui, LI Guang-wei

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: The particle image velocimetry (PIV) is an effective and non-intrusive technique to measure the planar distribution of velocity in the fluid based on the cross-correlation of flow images. In general, cross-correlation analysis in the PIV can be implemented quickly by the fast Fourier transform, and the efficiency can be improved by considering the property of real Fourier transform. Furthermore, the higher efficiency can be obtained by using the Hartley transform of separable kernels. Three algorithms are specified in detail in the paper, and the comparison of the three algorithms is conducted in the theory and computation time in practice, which can show the advantages of the Hartley transform.

Key words: PIV; cross-correlation; Fourier transform; Hartley transform

* The project is supported by National Outstanding Young Science Foundation of China (No. 50125924).