

# 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解

潘存鸿<sup>1,2</sup>, 林炳尧<sup>2</sup>, 毛献忠<sup>2</sup>

(1. 上海大学理学院, 上海 200436; 2. 浙江省水利河口研究院, 浙江 杭州 310020)

**摘要:** 以准确 Riemann 解为基础, 建立了求解一维非平底浅水流动方程的 Godunov 格式, 用“水位方程法 (Water Level Formulation, WLF)”求解 Riemann 解, 结合中心差分和 Riemann 解离散底坡项, 保证了计算格式的和谐性。经算例验证, 方法健全、通用, 且分辨率高。

**关键词:** 一维浅水流动方程; Godunov 格式; Riemann 解; 源项

**中图分类号:** TV 131.2      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-6791(2003)04-430-07

自从 1959 年 Godunov 在博士论文中提出了利用 Riemann 解求解双曲型方程的格式以来, 40 余年中, 已经不断改进。Van Leer 等发展了二阶精度 Godunov 格式, 使得该格式更有吸引力。因为 Godunov 格式具备模拟大梯度流动和自动捕捉激波的能力, 在计算流体力学中得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>。

1981 年, Marshall 和 Mendez<sup>[2]</sup>应用 Riemann 解求解浅水流动方程, 开辟了此方程新的求解途径。最近 10 年来, 以 Riemann 解为基础的 Godunov 型格式求解浅水流动方程的研究成果逐渐增多, 从一维发展到二维, 成为求解浅水大梯度流动的主要方法<sup>[3]</sup>。

如果不考虑底坡和摩阻作用, 则无源项的浅水流动方程类似于空气动力学中的欧拉方程, 早期工作大多针对次浅水流动方程, 直接移植空气动力学中成熟的 Godunov 格式<sup>[3-12,20]</sup>。在此基础上, 许为厚等<sup>[9]</sup>应用欧拉-拉格朗日统一坐标系准确模拟了带滑移线的浅水间断流动。

事实上, 浅水流动模拟的关键是河床起伏的模拟。应用常规的分步法求解非平底浅水方程时, 计算结果不具和谐性, 即在静水条件下, 流速不为零, 且水位不再为常数。近几年已有学者致力于非平底浅水流动方程和圣维南方程求解的研究<sup>[13-19]</sup>, 文献<sup>[17,18]</sup>在此取得了较大的进展。

本文以准确 Riemann 解为基础, 采用 Godunov 格式求解一维非平底浅水流动方程, 得到了和谐的计算结果, 并给出了算例。

## 1 控制方程及其求解方法

### 1.1 控制方程及控制体积法

考虑源项的一维浅水流动方程守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (1)$$

式中  $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$ ;  $F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$ ;  $S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$ 。其中,  $u$  为流速;  $h$  为水深;  $g$  为重力加速度;  $S_0$

为底坡项,  $S_0 = -gh \frac{db}{dx}$ ;  $b$  为河底高程;  $S_f$  为阻力项。

收稿日期: 2002-03-01; 修订日期: 2002-04-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40106010)

作者简介: 潘存鸿 (1963 - ), 男, 浙江宁波人, 浙江省水利河口研究院教授级高级工程师, 主要从事河口海岸规划研究。

E-mail: panch@mail.hz.zj.cn

对式(1) 在一个单元积分, 并引用 Green 公式, 即得控制体积法基本公式为

$$U^{n+1} = U^n - \frac{1}{x} \left[ \int_n^{n+1} F_{i+\frac{1}{2}} dt - \int_n^{n+1} F_{i-\frac{1}{2}} dt \right] + \frac{1}{x} \iint \delta dx dt \quad (2)$$

式中 下标为单元序号; 上标为时间步长数;  $\Delta t$ 、 $\Delta x$  分别为时间和空间步长;  $U^n$  为  $U$  在  $t = t^n$  时刻的平均值, 即

$$U^n = \frac{1}{x} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} U|_{t=t^n} dx$$

$U^{n+1}$  亦然;  $F$  为穿越单元边界  $x_{i-\frac{1}{2}}$  或  $x_{i+\frac{1}{2}}$  的通量。1959 年, Godunov 建议将 Riemann 问题的解取作为单元边界上的通量, 构成 Godunov 格式。

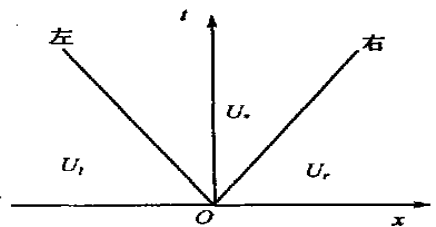
在尚未受到相邻断面影响的一段时间内, 单元边界上 Riemann 问题的解  $U$  是常数, 因此, 式(2) 即可写成

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}(RS; U_i, U_{i+1}) - F_{i-\frac{1}{2}}(RS; U_{i-1}, U_i) \right] + \bar{S}_i \Delta t \quad (3)$$

### 1.2 Riemann 问题及其解

忽略源项后, 式(1) 对应的 Riemann 问题提法为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 & t > 0 \\ U(0, x) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_r, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$



由于初始条件简单, 式(4) 有准确解。如图 1 所示, 在  $x - t$  平面上有两个波, 或激波, 或稀疏波, 分别向左、右传播。两个波把区域分割成左波左边的  $L$ 、右波右边的  $R$ , 以及两波之间的  $M$  3 个常状态区。

图 2 绘出了 4 种可能的流动, 即 左波为稀疏波、右波为激波; 左波为激波、右波为稀疏波; 左、右波均为稀疏波; 左、右波均为激波。波型判别条件为

图 1 一维浅水方程 Riemann 解结构  
Fig.1 Structure of the general solution of Riemann problem for 1-D shallow water equations

$h_* > h_l$ : 左波为激波;  $h_* < h_l$ : 左波为稀疏波。

$h_* > h_r$ : 右波为激波;  $h_* < h_r$ : 右波为稀疏波。

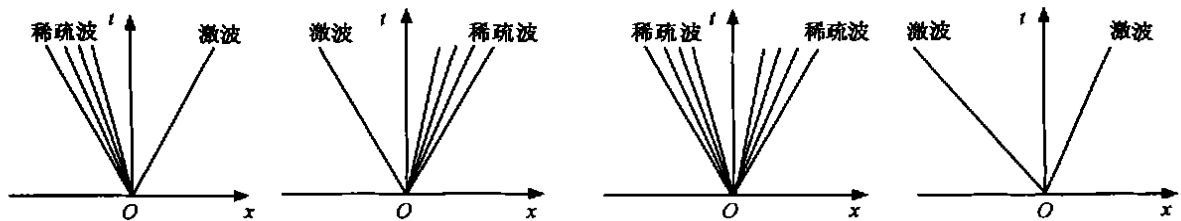


图 2 一维浅水方程 Riemann 解 4 种可能的波型结构

Fig.2 Possible four wave patterns in the solution of the Riemann problem for 1-D shallow water equations

Riemann 问题存在光滑、间断以及常值 3 种解<sup>[3,9]</sup>。

#### 1.2.1 光滑解

稀疏波两侧, 参数存在关系

$$u_* \mp 2 \sqrt{gh_*} = u_0 \mp 2 \sqrt{gh_0} \quad (5)$$

式中  $u_0$  为  $u_l$  或  $u_r$ ;  $h_0$  为  $h_l$  或  $h_r$ 。讨论  $L$  区与  $M^*$  区关系时, 上式取正号; 讨论  $R$  区与  $M^*$  区关系时则取负号。

稀疏波的扇区内, 存在

$$h_{\text{fan}} = \frac{1}{9g} \left[ \pm \frac{x}{t} \mp (u_0 \mp 2\sqrt{gh_0}) \right]^2 \quad (6)$$

$$u_{\text{fan}} = \frac{2}{3} \frac{x}{t} (u_0 \mp 2\sqrt{gh_0}) \quad (7)$$

### 1.2.2 间断解

根据 Rankine-Hugoniot 条件, 可得激波两侧关系

$$u^* = u_0 \pm \sqrt{\frac{g(h^* + h_0)(h^* - h_0)^2}{2h^*h_0}} \quad (8)$$

根据式(5)、式(8), 得到关于  $h^*$  的代数方程为

$$f(h) = f_l(h, h_l) + f_r(h, h_r) + u_r - u_l = 0 \quad (9)$$

其中

$$f_l = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_l}) & h < h_l \\ (h - h_l) \sqrt{\frac{1}{2g} \left( \frac{h + h_l}{hh_l} \right)} & h > h_l \end{cases}, \quad f_r = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_r}) & h < h_r \\ (h - h_r) \sqrt{\frac{1}{2g} \left( \frac{h + h_r}{hh_r} \right)} & h > h_r \end{cases}$$

$u^*$  的计算式为

$$u^* = \frac{1}{2}(u_l + u_r) + \frac{1}{2}[f_r(h^*, h_r) - f_l(h^*, h_l)] \quad (10)$$

式(9)可应用 Newton-Raphson 迭代法求解, 求解时需满足水深  $h^*$  的正值条件, 即

$$2\left(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r}\right) > u_r - u_l \quad (11)$$

### 1.3 带源项浅水流动方程的求解

浅水流动方程的源项包括底坡和摩阻两项。其中底坡项影响解的和谐性。此项的处理, 一直是个难点。

静水时, 流速为零, 水位为常数, 但因河床起伏, 各处水深不等。对于初始条件为  $u_i = u_{i+1} = 0$  和  $h_i = h_{i+1}$  的问题, 相应的 Riemann 解将给出  $(hu)_i = 0$ , 及  $u_i = 0$ 。尽管以后计算中, 动量方程的底坡项会减小部分误差, 但  $(hu)_i$  终不为零。即导致解不具有和谐性。

为克服这一困难, 许多学者做了工作<sup>[13~18]</sup>, 较满意的结果是 Zhou 等<sup>[17]</sup>的“水面梯度法 (Surface Gradient Method, SGM)”和许为厚、潘存鸿<sup>[18]</sup>的“水位方程法 (Water Level Formulation, WLF)”。本文采用 WLF 法。

WLF 法是将控制方程中的变量水深  $h$  改以水位  $z$  代替。虽然式(1)形式不变,  $U$ 、 $F$  和  $S$  则分别变为

$$U = \begin{bmatrix} z - b \\ (z - b)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} (z - b)u \\ (z - b)u^2 + \frac{1}{2}g(z - b)^2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ g(z - b)(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$$

其中河床高程  $b$  是  $x$  的函数, 这样处理以后, 相应的 Riemann 问题将难以求解。为此,  $b$  近似用相邻两单元的平均  $\bar{b}_{i, i+1}$  代替, 即  $\bar{b}_{i, i+1} = (b_i + b_{i+1})/2$ , 于是, 即可用经典方法求解 Riemann 解<sup>[18]</sup>。

尽管 WLF 法和 SGM 法的思路、控制方程均有不同, 但本质相同, 且 WLF 法中的  $\bar{b}_{i, i+1}$  等于 SGM 法的  $b_{i+1/2}$ , 因此计算结果也相同。WLF 法在概念上更简单, 且能在理论上解释了 SGM 法的误差性质及其大小。

### 1.4 底坡源项离散方法

浅水流动方程中的底坡源项  $g(z - b) \frac{db}{dx}$  和压力梯度项  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}g(z - b)^2 \right]$  源于  $g(z - b) \frac{\partial z}{\partial x}$ 。为达到计算方法的和谐性, 求相应的 Riemann 问题解时, 除应用上述方法处理外, 对底坡源项还需选取合适的离散方法, 使得在计算过程中始终满足条件

$$g(z - b) \frac{\partial z}{\partial x} = g(z - b) \frac{db}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}g(z - b)^2 \right]$$

压力梯度项在 Riemann 问题中的离散形式为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} g(z-b)^2 \right] = \frac{\frac{1}{2} g(z-b)_{i+1/2}^2 - \frac{1}{2} g(z-b)_{i-1/2}^2}{x} = \frac{g [(z-b)_{i+1/2} + (z-b)_{i-1/2}] [(z-b)_{i+1/2} - (z-b)_{i-1/2}]}{2x}$$

底坡源项的离散形式必须与其一致，即应为

$$g(z-b) \frac{\partial z}{\partial x} = g \frac{(z-b)_{i+1/2} + (z-b)_{i-1/2}}{2} \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{x}$$

事实上，即便采用上式，其中的水深亦须采用 Riemann 解，否则仍不能保证解的和谐性。

## 2 算 例

所有算例均略去摩阻项，采用 Godunov-MUSCL 格式，计算采用双精度。除算例 3 外，重力加速度取  $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 。

### 2.1 算例 1：溃坝波问题

计算域  $0 \sim 1 \text{ m}$ 。第 1 个算例针对平底河床，河底高程  $b=0$ 。初始条件为

$$(z_l = 1.0, \quad u_l = 0.0) \Big|_{x < 0.6}, \quad (z_r = 0.2, \quad u_r = 0.0) \Big|_{x > 0.6}$$

第 2 个算例针对非平底河床，底高程  $b(x) = 1.398 - 0.347 \tan h(8x - 4)$ ，初始条件为

$$(z_l = 1.0 + b(0), \quad u_l = 0.0) \Big|_{x < 0.6}, \quad (z_r = 0.2 + b(1), \quad u_r = 0.0) \Big|_{x > 0.6}$$

计算网格 200 个，两算例在  $t = 0.08 \text{ s}$  时的计算结果见图 3 和图 4。可见，本文所用格式有很强的捕捉激波能力。

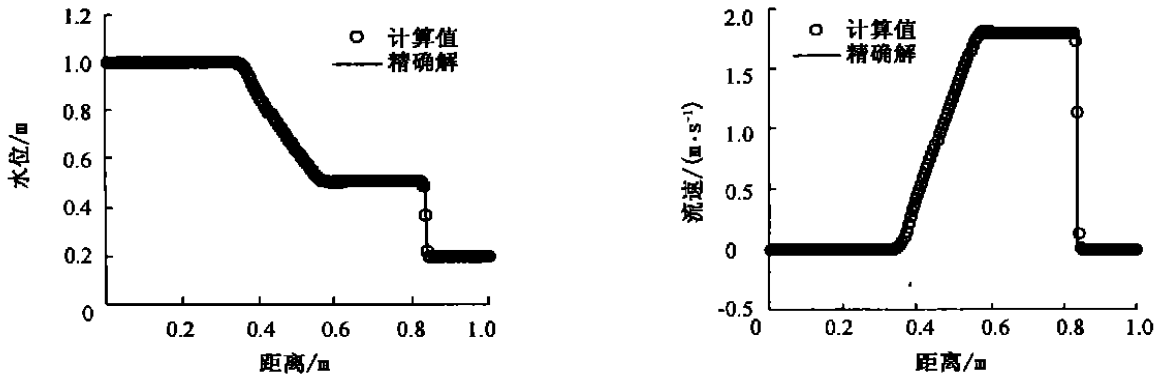


图 3 平底溃坝波

Fig. 3 Dam break wave with zero bottom gradient

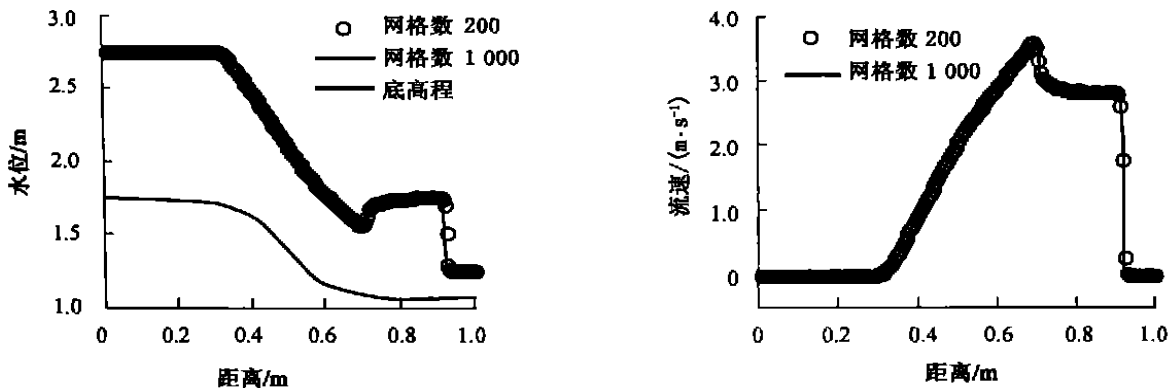


图 4 非平底溃坝波

Fig. 4 Dam break problem wave bottom topography

2.2 算例2：经典混合流

根据不同的初边值条件，流场内可能同时存在亚临界流、激波以及超临界流。因此，模拟最为困难，经常用于测试计算方法的适应性。

$$\text{取计算域长 } 25 \text{ m, 底高程为 } b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & 8 < x < 12 \\ 0.0 & \text{其他} \end{cases}$$

除静水算例外，还计算2个混合流例子。计算单元200个，距离步长  $\Delta x = 0.125 \text{ m}$ 。

第1个算例为静水流动。初始条件为流速  $u = 0$ ，水位  $z = 0.33 \text{ m}$ 。计算结果，流速始终为零，水位始终为  $0.33 \text{ m}$ ，表明格式和谐。

第2个为无激波混合流问题，给定入流单宽流量  $hu = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$ ，出流处  $z = h = 0.4 \text{ m}$ 。计算结果绘于图5。

第3个为有激波混合流问题，给定入流单宽流量  $hu = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$ ，出流处  $z = h = 0.33 \text{ m}$ 。结果绘于图6。

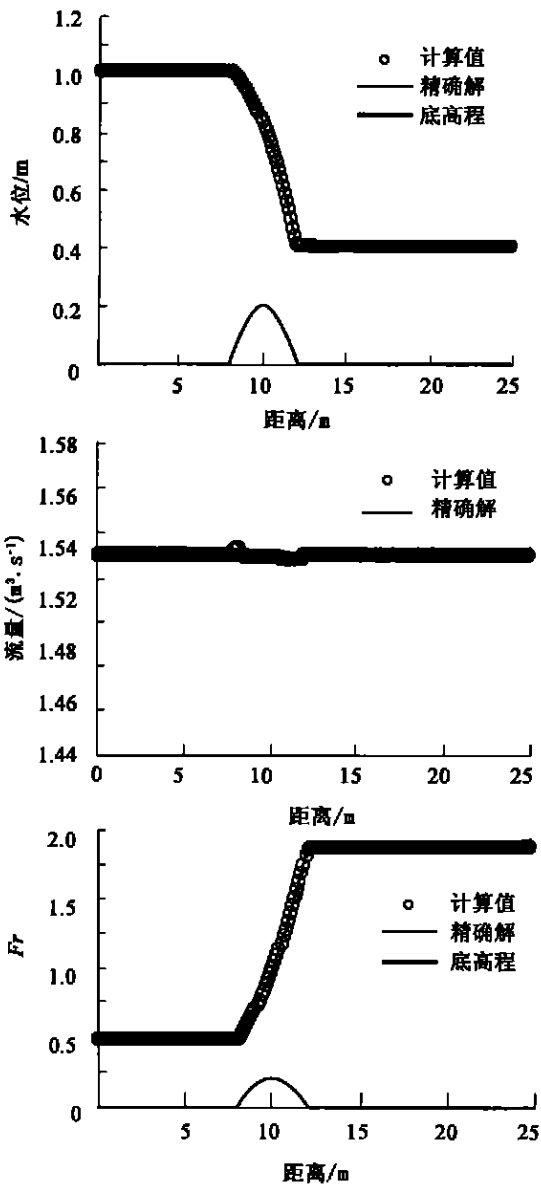


图5 恒定无激波混合流

Fig. 5 Steady transcritical flow without a shock

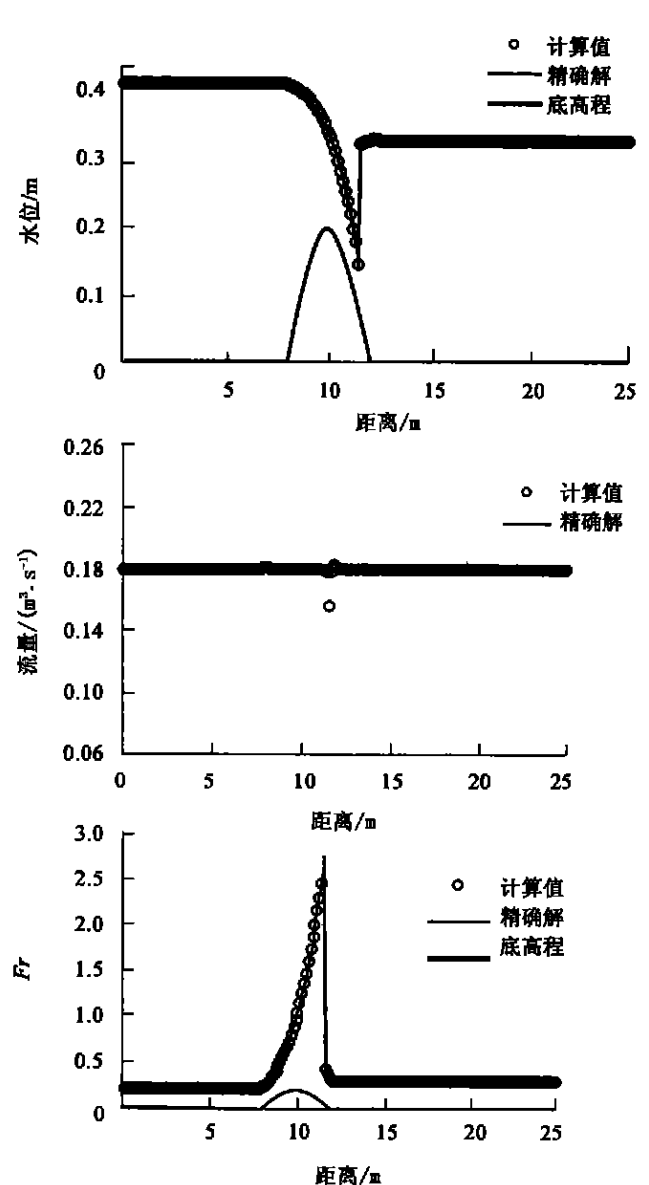


图6 恒定带激波混合流

Fig. 6 Steady transcritical flow with a shock

### 2.3 算例3：Le Veque 水波传播问题<sup>[15, 21]</sup>

渠道长 1.0 m, 底高程为

$$b(x) = \begin{cases} 0.25[\cos((x - 0.5)/0.1) + 1.0] & / x - 0.5/ 0.1 \\ 0.0 & \text{其他} \end{cases}$$

初始流速  $u = 0$ , 初始水位

$$z(x) = \begin{cases} 1.0 + & 0.1 < x < 0.2 \\ 1.0 & \text{其他} \end{cases}$$

在  $\Delta t = 0.01$ , 网格数 200 个, 重力加速度  $g = 1.0$ ,  $t = 0.7$  s 时的计算结果绘于图 7。可以看出, 即使在  $0.4 < x < 0.6$  间河床起伏处, 水位也非常光滑, 而不少格式应用于算例时往往失败。

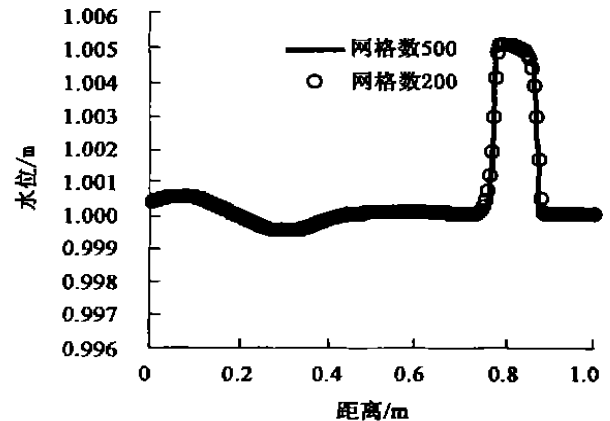


图7 Le Veque 算例  $t = 0.7$  s 时水位沿程变化  
Fig.7 Water level of Le Veque 's example at  $t = 0.7$  s

## 3 结 语

本文以浅水流动方程相应 Riemann 问题的解为基础, 应用 WLF 方法建立了求解一维非平底浅水流动方程的 Godunov 格式。经各种算例验证, 无论针对恒定流还是非恒定流, 计算方法和谐, 具有健全性、通用性, 且有很高的分辨率, 并可以推广到求解二维浅水流动方程。

致谢: 本文为笔者在香港科技大学访问期间的成果, 承蒙许为厚教授审阅, 谨表感谢。

### 参考文献:

- [1] EF Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics[M]. Berlin: Springer, 1999.
- [2] Marshall E, Mendez R. Computational aspects of the random choice method for shallow water equations[J]. J Comput Phys, 1981, 39:1 - 21.
- [3] EF Toro. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2001. 15 - 165.
- [4] Gaister P. Approximate riemann solutions of the shallow water equations[J]. Journal of Hydraulic Research, 1988, 26(3): 293 - 306.
- [5] Alcrudo F, Garcia-navarro P, Jose-Maria Saviron. Flux difference splitting for 1D open channel flow equations[J]. Int J Numer Meth Fluids, 1992, 14: 1009 - 1018.
- [6] EF Toro. Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensionl shallow water equations[J]. Phil Trans R Soc, Lond A, 1992, 338: 43 - 67.
- [7] Fraccarollo L, EF Toro. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problem[J]. Journal of Hydraulic Research, 1995, 33(6): 843 - 863.
- [8] Alcrudo F, Garcia-Navarro P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for 2-D shallow-water equations[J]. Int J Numer Meth Fluids, 1993, 16: 489 - 505.
- [9] Hui WH, Kudriakov S. Computationa of the shallow water equations using the unified coordinates[J]. SIAMJ Sci Comput, 2002, 23:1615 - 1654.
- [10] Fujihara M, Borthwick AGL. Godunov-Type Solution of Curvilinear Shallow-Water Equations[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000, 126(11): 827 - 836.
- [11] Brufau P, Garcia-Navarro P. Two-dimensional dam break flow simulation[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2000, 33(1): 35 - 57.
- [12] Anastasiou K, Chan CT. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes[J]. Int J Numer Meth Fluids, 1997, 24(11): 1225 - 1245.
- [13] Sanders BF. High-resolution and non-oscillatory solution of the St Venant equations in non-rectangular and non-prismatic channels[J]. Journal of Hydraulic Research, 2001, 39(3), 321 - 330.
- [14] Roger B, Fujihara M, Borthwick AGL. A daptive Q-tree godunov-type scheme for shallow water equations[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2001, 35: 247 - 280.

- [15] R J LeVeque. Balancing source terms and flux gradient in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm[J]. *J Comput Phys*, 1998, 148: 346 - 365.
- [16] Vazquez-Cendon ME. Improved treatment of source terms in upwind schemes for shallow-water equation in channels with irregular geometry [J]. *J Comput Phys*, 1999, 148: 497 - 526.
- [17] Zhou J G, Causon D M, Mingham C G, *et al.* The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations [J]. *J Comput Phys*, 2001, 168:1 - 25.
- [18] 许为厚, 潘存鸿, 林炳尧, 等. 钱塘江河口涌潮数值模拟方法研究[A]. 第十六届全国水动力学研讨会文集[C]. 北京:海洋出版社, 2002. 7 - 16.
- [19] Zhao DH, Shen HW, Tabios C Q, *et al.* Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins[J], *Journal of Hydraulic Engineering*, 1994, 120(7): 863 - 883.
- [20] 谭维炎. 计算浅水动力学——有限体积法的应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1998. 49 - 51.
- [21] 徐 昆, 潘存鸿. 求解非平底一维浅水流动方程的 KFVS 格式[J]. *水动力学研究与进展*, 2002, A 辑, 17(2): 140 - 147.

## A Godunov-type scheme for 1-D shallow water flow with uneven bottom<sup>\*</sup>

PAN Cun-hong<sup>1,2</sup>, LIN Bing-yao<sup>2</sup>, MAO Xian-zhong<sup>2</sup>

(1. *Shanghai University, Shanghai 200436, China*; 2. *Zhejiang Institute of Hydraulics and Estuary, Hangzhou 310020, China*)

**Abstract :** Based on exact the Riemann solution, this paper presents a Godunov-type scheme for 1-D shallow-water equations with uneven bottom. Central difference and the Riemann solution with “water level formulation” are used in the discretisation of the source term to keep the scheme well-balanced. Numerical experiments are presented to demonstrate that the scheme is robust, versatile and high in resolution.

**Key words :** 1-D shallow-water flow; Godunov-type scheme; Riemann solution; source terms

---

\* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 40106010).