

二维明渠非恒定流的格子 Boltzmann 模拟

程永光¹, 索丽生²

(1. 武汉大学水利水电学院, 湖北 武汉 430072; 2. 河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 根据二维浅水波方程的特点, 应用由格子 Boltzmann 方程展开的多尺度方程, 建立了一个能模拟二维明渠非恒定流的格子 Boltzmann 模型。通过对一维溃坝波和二维圆形溃坝波的模拟分析, 验证了该模型的有效性。以某水电站尾水渠为例, 模拟分析了由机组甩负荷和增负荷引起的水位波动规律, 为尾水渠的设计提供了依据。

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 二维明渠非恒定流; 二维浅水波方程; 尾水明渠

中图分类号: TV 133.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2003)01-009-06

近年来, 作为一种新的数值计算方法, 格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann Method, LBM) 由于具有算法简单、边界条件易处理、压力直接计算、适宜并行计算等优点, 引起人们的广泛重视, 并在偏微分方程求解、多相流、多组分流、多孔介质流、反应扩散流、生物流场, 尤其多维不可压流场的模拟方面得到应用^[1]。笔者曾尝试将 LBM 应用于一维、二维水力过渡过程^[2,3]和一维明渠非恒定流^[4], 初步的研究证明该方法有效可行。本文旨在发展 LBM, 建立其求解二维明渠非恒定流模型, 并尝试模拟实际的二维非恒定流问题。

1 LB 方程和多尺度方程

LBM 是以运动论作为背景的一种数值方法, 它通过粒子分布函数按 Lattice Boltzmann (LB) 方程的演化来模拟宏观流动^[1]。常用的 LB 方程是带 BGK 碰撞项的 LBK 方程^[1]

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i, t + \tau) - f(\mathbf{r}, t) = -\frac{\tau}{\Lambda} [f(\mathbf{r}, t) - f^{(0)}(\mathbf{r}, t)] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, b) \quad (1)$$

式中 f 为粒子分布函数; $f^{(0)}$ 为局部平衡分布函数; Λ 为弛豫时间, 控制 f 趋向 $f^{(0)}$ 的速度; \mathbf{r} 为流场划分的计算网格点; \mathbf{e} 为粒子的运动速度向量; i 为粒子运动方向; τ 为时间步长; b 为粒子运动向量的个数 (不包括 $\mathbf{e}_0 = 0$)。

LBM 是简单的分布函数的运动, 实际上对应着复杂的宏观流动, 它模拟流场的步骤是: 首先根据模型将流场划分为均匀网格; 然后让 LB 方程在网格上演进, 也就是令 f 按式 (1) 在计算网格上进行迭代求解, 最后对中间观量 f 求矩, 以计算流场的宏观量如密度和流速等。

建立 LBM 模型的主要工作实际上是: 在一定网格划分 \mathbf{r} 和速度离散 \mathbf{e} 的前提下, 通过理论分析确定平衡分布函数 $f^{(0)}$ 。 $f^{(0)}$ 的精确表达式应能保证 LB 方程演进时对应的宏观方程正好是我们所要模拟的流动控制方程。LB 方程 (1) 对应的宏观方程可用 Chapman-Enskog 展开和多尺度分析获得, 其多尺度方程可表示为^[1,3,4]:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \sum f^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sum e_j f^{(0)} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \sum e_j f^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sum e_i e_j f^{(0)} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum f^{(0)} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_0} \sum e_j e_k f^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_k} \sum e_j e_k f^{(0)} \right] = 0 \quad (4)$$

收稿日期: 2001-11-28; 修订日期: 2002-03-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50009007)

作者简介: 程永光 (1968 -), 男, 山西武乡人, 武汉大学副教授, 博士, 主要从事水电站水力学方面的研究。

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum_i e_i f^{(0)} + \left(\frac{1}{2} \cdot \right) \left[\frac{\partial}{\partial t_0 \partial x_j} \sum_i e_i e_j f^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_k} \sum_i e_i e_j e_k f^{(0)} \right] = 0 \quad (5)$$

式中 $\ll 1$ 是个很小的正数, 称为 Knudsen 数, 是粒子运动的平均自由程与宏观特征长度的比值, τ^{-1} 与网格划分的规模相当。

多尺度方程式 (2) ~ 式 (5) 架起了 LB 方程和其对应宏观方程联系的桥梁。

2 二维明渠非恒定流 LBM 模型的建立

2.1 二维浅水波方程

二维明渠非恒定流的基本方程是浅水波方程, 可表示为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial(hu_j)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{2} h^2 \right) = S_i \quad (7)$$

式中 h 为水深; u_i 是沿深度平均的流速; g 为重力加速度; $S_i = S_{bi} - S_{fi}$, 其中 $S_{bi} = g h s_{bi}$ 为渠道底坡引起的水面坡降, $S_{fi} = g u_i n^2 \sqrt{u_j u_j} / h^{1/3}$ 为摩阻引起的水面坡降, s_{bi} 为渠道底坡在 i 方向的分量; n 为 Manning 糙率系数。

2.2 LBM 模型

建立专门模拟二维浅水波的模型 D2Q9S (二维九点浅水波模型), 其网格划分和速度离散与文献 [1, 3] 的 D2Q9 模型相同。定义

$$h = f = f^{(0)}, \quad hu_i = e_i f = e_i f^{(0)} \quad (8)$$

代入多尺度方程式 (2) ~ 式 (5) 得

$$\frac{\partial}{\partial t_0} h + \frac{\partial}{\partial x_j} (hu_j) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0} hu_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}^{(0)} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} h + 0 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} hu_i + \left(\frac{1}{2} \cdot \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}^{(1)} = 0 \quad (12)$$

其中

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \sum_i e_i e_j f^{(0)} \quad (13)$$

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t_0} \Pi_{ij}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i e_i e_j e_k f^{(0)} \quad (14)$$

参考 D2Q9 模型, 取平衡分布函数

$$f_0^{(0)} = \frac{4}{9} h \left[\left(\frac{9}{4} - \frac{45}{24} g h \right) - \frac{3}{2} / u^2 \right] \quad (15)$$

$$f^{(0)} = \frac{1}{9} \left[\frac{3}{2} g h + 3(e \cdot u) + \frac{9}{2} (e \cdot u)^2 - \frac{3}{2} / u^2 \right] \quad = 1, 2, 3, 4 \quad (16)$$

$$f^{(0)} = \frac{1}{36} \left[\frac{3}{2} g h + 3(e \cdot u) + \frac{9}{2} (e \cdot u)^2 - \frac{3}{2} / u^2 \right] \quad = 5, 6, 7, 8 \quad (17)$$

则

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \frac{g}{2} h^2 \delta_{ij} + hu_i u_j \quad (18)$$

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \left[\frac{1}{3} - gh \right] \frac{\partial(hu_k)}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(hu_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(hu_j) \right] - gh \left[u_i \frac{\partial h}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial h}{\partial x_i} \right] + O(M^3) \quad (19)$$

进行尺度粘合式(9) + x式(11), 和式(10) + x式(12), 得到该 D2Q9S 模型对应的宏观方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0 + O(\frac{2}{t}) \quad (20)$$

$$\frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{2} h^2 \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}^{(1)} + O(\frac{2}{t}, M^3) \quad (21)$$

可见, 如果 $\frac{1}{2}$, 方程(20)、(21)与方程(6)、(7)之差只有源项 S_i 和 $O(\frac{2}{t}, M^3)$ 。

为了加入源项 S_i , 须将 LB 方程附加外力项, 变为

$$f(r + e_i \tau, t + \tau) - f(r, t) = -\tau \left[f(r, t) - f^{(0)}(r, t) \right] + \tau g(r, t) \quad (22)$$

要求

$$g_0 = 0, \quad e_i g = S_i, \quad e_i e_j g = 0 \quad (23)$$

于是可给定

$$\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ g &= \frac{e_i}{3} S_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ g &= \frac{e_i}{12} S_i, \quad i = 5, 6, 7, 8 \end{aligned} \quad (24)$$

这样, D2Q9S 模型按带附加项的 LB 方程(22)运行, 附加项取式(24), 且令 $\tau = 1/2$ 时, LBM 对应的宏观方程就能逼近二维浅水波方程式(6)、式(7), 截断误差是 $O(\frac{2}{t}, M^3)$ 。

3 模型验证

3.1 一维溃坝波

采用二维模型模拟一维溃坝波。设渠底水平, 堤坝位于 $x=0$ 处, 上游水位 $h_1=1$, 下游水位 h_2 取三种情况: $h_2=0.5$ 、 $h_2=0.1$ 和 $h_2=0.05$ 。 $t=0$ 时堤坝突然溃决, 形成向下游传播的断波和向上游传播的退水波。图 1 是 $t=0.1$ 时刻不同 h_2 情况下的水位和流速分布曲线。图 1 中实线是解析解^[5], 方形和圆形符号是 D2Q9S

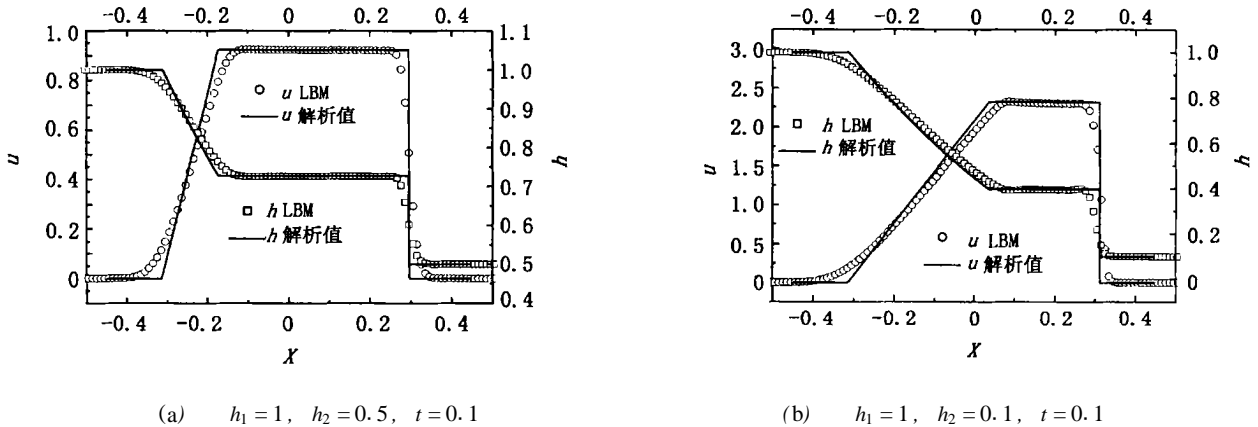


图 1 水位和流速分布曲线

Fig. 1 Velocity and water depth distributions after dam broke

的计算值。图1(a)中上下游水位之比 $h_1/h_2 = 2$, 流动是缓流。图1(b)中 $h_1/h_2 = 10 > 7.23$, $X > 0$ 的部分是急流 (Froude 数 $Fr > 1$)。可以看出, 它们的水位和流速分布与解析解吻合较好。当 $h_1/h_2 = 20 > 7.23$ 时, $X > 0$ 部分也是急流, 计算结果与解析解基本一致, 只是在断波的均匀恒定区域的前后有数值跳动。该例说明本文 D2Q9S 模型可以很好地模拟缓流溃坝波, 虽然也能模拟有急流区的溃坝波, 但 Froude 数不能太大, 这可能与该模型的截断误差含 $O(M^3)$ 有关。

3.2 二维圆形溃坝波

为检验 D2Q9S 模型的二维特性, 特模拟圆形溃坝波。设一直径 0.33 的圆形堤坝的坝内水位 $h_1 = 1$, 坝外水位 $h_2 = 0.5$ 。 $t = 0$ 时刻堤坝突然失去挡水作用, 形成圆形溃坝波。取 1×1 的计算区域, 划分 100×100 的计算网格, 坝圆布置于中心。计算出的溃坝波的产生和传播过程结果与其它方法的结果十分一致。图2展示了不同时刻的水位图。 $t = 0.04$ 时刻的水位等高线呈同心圆(图略), 说明该模型各向同性很好。

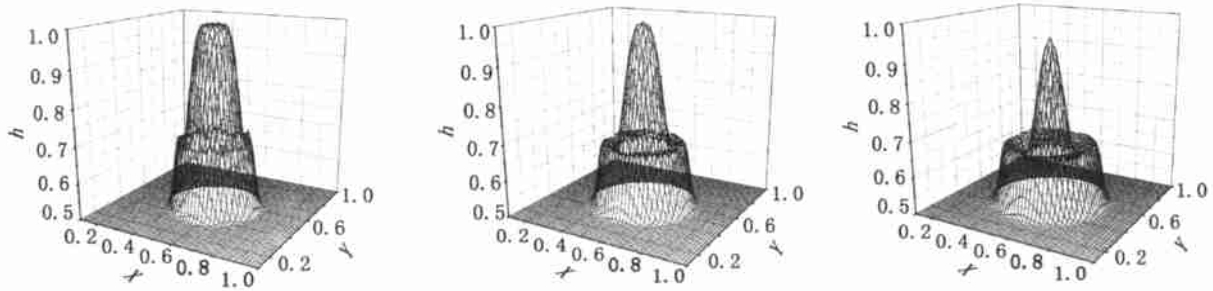


图2 圆形溃坝波的形成和发展 ($h_1 = 1, h_2 = 0.5, t = 0.02, 0.03, 0.04$)

Fig.2 Wave forms after circular dam broke ($h_1 = 1, h_2 = 0.5$) at $t = 0.02, 0.03, 0.04$

4 水电站尾水渠二维非恒定流模拟

某地下厂房水电站的尾水渠和尾水洞出口布置如图3。尾水渠底板为平坡, 高程 186.0 m。设计尾水位 206.0 m。机组额定流量 $320 \text{ m}^3/\text{s}$ 。要求计算四台机组同时甩负荷、两台机组同时甩负荷和两台机组同时启动工况尾水渠中的涌浪。

划分 90×100 的网格, 用 D2Q9S 模型计算。设尾水洞出口流速沿洞宽呈抛物线形分布, 过渡过程中尾渠出口水位恒定(水深保持 20 m 不变)。甩负荷工况, 尾水洞出口流速最大值在 10 s 内由 2.0 m/s 线性降为 0; 机组启动工况, 流速最大值在 20 s 内由 0 线性增至 2.0 m/s 。

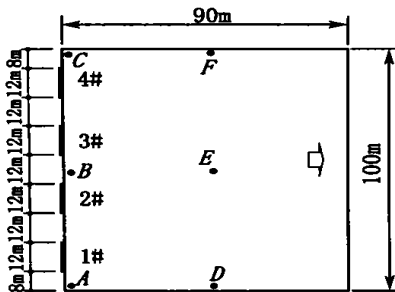


图3 尾水渠及尾水洞出口平面布置示意图

Fig.3 Schematic layout of tailrace open channel

图4和图5分别是四台机组同时甩负荷工况的水位过程线和水位等高线。图6和图7分别是1#与2#机组同时甩负荷工况的水位过程线和水位等高线。图8和图9分别是1#与2#机组同时启动工况的水位过程线和水位等高线。可以看出, 四台机组同时甩负荷工况的水流基本呈一维特性, 用一维方法模拟误差不大, 但另外两种工况必须用二维模型模拟才能反映实际。由图4可量得渠首到渠尾水位波动的反射传播周期是 26.2 s, 而解析解是 $90/\sqrt{9.81} \times 20 \times 4 = 25.7 \text{ s}$, 两者吻合较好。这些图正确反映了涌波在尾水渠中的传播和反射过程, 与理论分析和实验现象一致。计算所得的最高和最低涌浪都发生在四台机组全甩负荷工况, 分别为 206.84 m 和 205.07 m, 发生位置均在渠首。

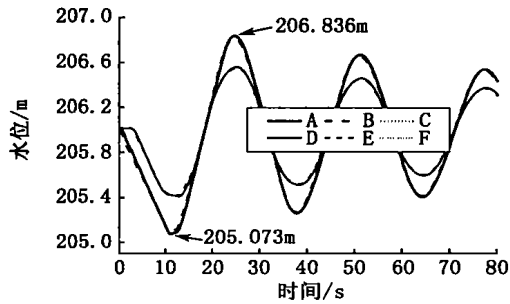


图 4 四台机组同时甩负荷工况的水位过程线
Fig.4 Hydrograph of stage after load rejection of full units

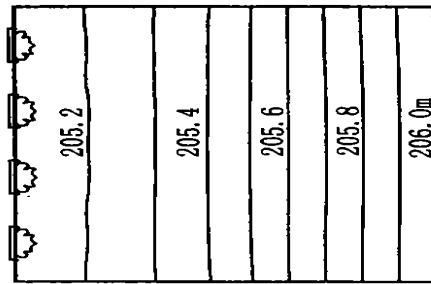


图 5 四台机组同时甩负荷时刻水位等高线
Fig.5 Contours of stage at $t = 10$ s after load rejection of full units

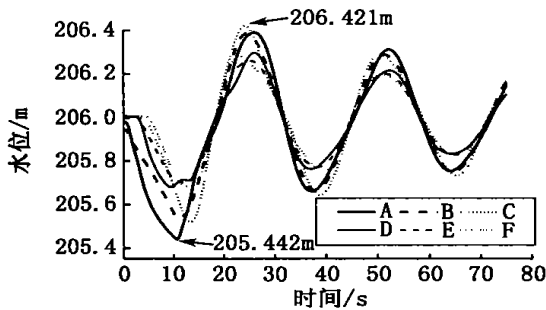


图 6 两台机组同时甩负荷工况的水位过程线
Fig.6 Hydrograph of stage after load rejection of two units

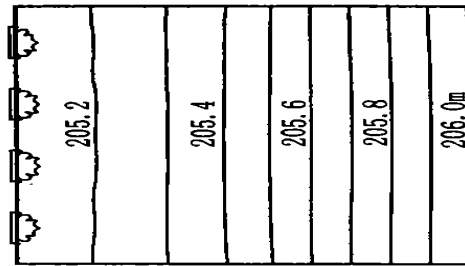


图 7 两台机组同时甩负荷 $t = 10$ s 时刻水位等高线
Fig.7 Contours of stage at $t = 10$ s after load rejection of two units

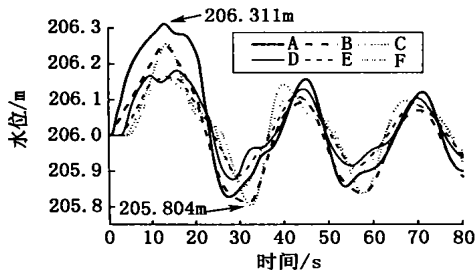


图 8 两台机组同时启动 $t = 10$ s 工况的水位过程线
Fig.8 Hydrograph of stage caused by starting of two units

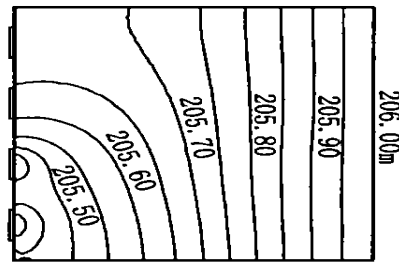


图 9 两台机组同时启动时刻水位等高线
Fig.9 Contours of stage at $t = 10$ s after starting of two units

5 结 语

本文建立了模拟二维浅水波方程的 D2Q9S 模型。通过对一维溃坝波和圆形溃坝波的模拟，验证了模型能很好地模拟二维明渠缓流，并具有良好的各向同性。作为应用，对某水电站尾水渠中由电站操作所引起的非恒定流进行了初步模拟分析，结果正确可信，可为工程设计提供依据。该模型模拟明渠缓流是有效的，模拟急流时效果较差，需要进一步研究。另外，作为初步尝试，本文模拟的浅水波方程有一定的局限性，若要计算实际河道的二维非定流，还应建立相应的模型。

参考文献:

- [1] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1998, 30: 329 - 364.
- [2] 程永光, 张师华, 陈鉴治. 用 Lattice Boltzmann 方法模拟水击[J]. *水利学报*, 1998, (6): 25 - 30.
- [3] 程永光, 张 慧. 用 Lattice Boltzmann 方法模拟二维水力过渡过程[J]. *水利学报*, 2001, (10): 20 - 26.
- [4] 程永光, 索丽生. 计算明渠非恒定流的一个 Lattice BGK 模型[J]. *水科学进展*, 2000, 11(4): 362 - 367.
- [5] Louaked M, Hanich L. TVD scheme for the shallow water equations[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1998, 36:363 - 378.

2-D open channel flow simulations by the lattice Boltzmann model^{*}CHENG Yong-guang¹, SUO Li-sheng²

(1. Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A special lattice Boltzmann model for simulating 2-D unsteady open channel flows is built by combining the Chapman-Enskog-Expansion derived multi-scale equations that approximate the form of shallow water equations. To verify the model typical 1-D and 2-D dam breaks are simulated, and the results show agreement with analytical method and other models. As an actual example, the unsteady flows in the tailrace channel of a hydropower plant are calculated.

Key words: lattice Boltzmann method; 2-D unsteady open channel flow; 2-D shallow water equation; tailrace channel

2001 年《水科学进展》被美国《工程索引(Ei)》收录情况

根据美国工程信息公司《Ei》对 2001 年收录论文的最新统计资料表明,《Ei》又对该年期刊作了补充收录,《水科学进展》2001 年被《Ei》收录的论文已由原来的 64 篇跃增到 91 篇,即当年刊出的凡有英文摘要的论文全部被收录,创下了近年《水科学进展》被《Ei》收录的新高。有关论文作者如需有关收录的资料,请径直与《水科学进展》编辑部联系。

何 闻

* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 50009007).