

# 小波分析在水文学中的应用研究及展望

王文圣, 丁 晶, 向红莲

(四川大学水电学院, 四川 成都 610065)

**摘要:**扼要介绍了 20 世纪 80 年代初发展起来的, 被誉为数学“显微镜”的信号分析新方法——小波分析。在此基础上, 综述了小波分析在水文水资源系统中的应用研究现状。展望了小波分析在该领域的未来研究趋势和发展方向。将小波分析引入水科学, 不但拓宽了应用范围, 而且推动了小波理论本身的发展。

**关键词:**小波分析; Fourier 变换; 水文水资源; 展望

**中图分类号:** P 333.9; G 353.11 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2002)04-515-06

小波分析<sup>[1]</sup>(子波分析)由法国工程师 Morlet 于 1980 年在分析地震资料时提出的。在随后的 20 年里, 小波分析成为国际研究热点。目前小波分析在信号处理、图像压缩、语音编码、模式识别、地震勘探、大气科学以及许多非线性科学领域内取得了大量的研究成果。

水资源合理开发、利用和有效配置, 关系到社会和国民经济持续健康发展。将小波分析引入水科学应用研究中, 并与现代科学理论和方法结合, 从多方面揭示水科学的内在规律, 为水资源合理开发利用和有效配置提供更多的依据。将小波分析引入水科学, 不但拓宽了应用范围, 而且还推动了小波理论本身的发展。

## 1 小波分析方法

### 1.1 小波分析方法的形成与发展

小波分析是 Fourier 分析发展史上的一个里程碑式的进展, 具有时、频同时局部化的优点, 因此被誉为数学“显微镜”, 其理论形成经历了三个阶段<sup>[2]</sup>:

(1) Fourier 变换(FT)阶段 在信号分析中, 对信号的基本刻画, 往往采取时域和频域两种基本形式。时域分析无法得到关于信号变化的更多信息(如采样、周期等)。1822 年 Fourier 提出了频域分析法——Fourier 变换( $F(\cdot)$ ), 能揭示信号  $f(t)$  的能量在各个频率成分中的分布情况。许多时域上看不清的问题, 通过  $F(\cdot)$  就显得清晰了。 $F(\cdot)$  确定了  $f(t)$  在整个时间域上的频谱特性, 不能反映信号某一局部时间附近的频谱特性, 因此在时间域上没有任何分辨率。这对具有突变的信号, 如暴雨、洪水等的分析带来诸多不便和困难。

(2) 短时 Fourier 变换(SFT)阶段 1946 年 Gabor 提出 SFT。SFT 能实现信号时频局部化分析, 但窗函数一选定, 其窗口的大小和形状固定不变, 其分辨率是有限的。由于频率与周期成反

收稿日期: 2001-05-14; 修订日期: 2001-07-20

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(50099620); 四川大学高速水力学国家重点实验室开放基金(2008)

作者简介: 王文圣(1970-), 男, 四川宣汉人, 四川大学水电学院副教授, 博士, 从事水文水资源预测与模拟研究。

比, 高频信号需要窄的时间窗, 低频信号需要宽的时间窗, 即变换的窗口大小应随频率而变。SFT 解决不了这个问题。

(3) 小波分析阶段 在继承 SFT 的基础上, Morlet 提出了小波变换法(WT)。WT 可研究信号在各个时刻或各位置在不同尺度上的演变情况, 实现了时频局部化分析。

小波理论于 1980 年由 Morlet 首创。1984 年他与 Grossman 共同提出连续小波变换的几何体系, 成为小波分析发展的里程碑。1985 年, 法国数学家 Meyer 创造性构造了规范正交基, 提出了多分辨率概念和框架理论。小波热由此兴起。1986 年 Battle 和 Lemarie 又分别独立地给出了具有指数衰减的小波函数; 同年, Mallat 创造性地发展了多分辨分析概念和理论并提出了快速小波变换算法——Mallat 算法。Daubechies(1988)构造了具有有限紧支集的正交小波基, Chui 和王建忠(1990)构造了基于样条函数的正交小波。至此, 小波分析的系统理论得以建立。最近有人又提出了小波包理论, 它是小波理论的进一步发展。

### 1.2 小波变换

小波是具有震荡特性、能够迅速衰减到零的一类函数, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ 。由  $\psi(t)$  的伸缩和平移构成一族函数系:

$$\psi_{a,b}(t) = |\ a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad b \in R, a \in R, a > 0 \tag{1}$$

式中  $\psi_{a,b}(t)$  称子小波;  $a$  为尺度因子或频率因子;  $b$  为时间因子或平移因子。对于能量有限信号  $f(t) \in L^2(R)$ , 其连续小波变换定义为

$$W_f(a,b) = |\ a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \tag{2}$$

式中  $\overline{\psi(t)}$  为  $\psi(t)$  的复共轭函数。式(2)说明小波变换是对信号用不同滤波器进行滤波。

当研究离散信号  $f(i \ t) (i=1,2, \dots, N; N$  为样本容量;  $t$  为取样时间间隔)时, 式(2)的离散形式表达为

$$W_f(a,b) = |\ a|^{-1/2} \sum_{i=1}^N f(i \ t) \overline{\psi\left(\frac{i \ t - b}{a}\right)} \tag{3}$$

如果  $\psi(t)$  满足相容条件:  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} |\ \psi(t) |^{-2} dt < +\infty$ , 其中  $\psi(t)$  为  $\psi(t)$  的 FT。则称  $\psi(t)$  为允许小波。对于允许小波产生的信号连续小波变换,  $f(t)$  可重构:

$$f(t) = C^{-1} \iint_{R^2} W_f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \tag{4}$$

$W_f(a,b)$  包含了  $f(t)$  的信息和  $\psi_{a,b}(t)$  的信息。因此, 小波函数的选择十分重要。目前广泛使用的有 Haar 小波, 墨西哥帽(Marr)小波, 高斯类小波, 样条小波, Morlet 小波等。

### 1.3 快速小波算法

小波变换计算通常有两种算法: (1) 直接进行数值积分, 利用已知的  $f(t)$  和  $\psi(t)$  在参数空间  $(a,b)$ , 逐点计算小波系数。这种方法较费时。(2) 快速小波变换法, 不涉及具体的小波函数和尺度函数, 计算快速简单。常用的有 Mallat 算法和 A Trouis 算法。

## 2 小波分析在水文学中的应用研究

随着小波理论的形成和发展, 其优势逐渐引起许多水科学工作者的重视并引入水文水资源

学科中<sup>[3]</sup>。从1993年Kumar和Foufoular-Gegious<sup>[4]</sup>将WT介绍到水文中以来,WT在水科学中已取得了一定研究成果,主要表现在水文多时间尺度分析、水文时间序列变化特性分析、水文预测预报和随机模拟方面。

### 2.1 小波分析在水文多时间尺度分析中的应用

1993年,P.Kumar和Foufoular-Gegious<sup>[4]</sup>在评述WT基础上,运用正交小波(Haar小波)变换研究了空间降水的尺度和振荡特征。研究表明空间降水存在标度的自相似性和时间尺度的多种成分。WT提供了分解二维空间非均质和各向异性降水场的一个方法。1996年,V.Venckp和Foufoular-Gegious<sup>[5]</sup>用小波包理论对降水序列进行小波分解,识别其时间-频率尺度,进而进行能量分解,为研究降水形成机制开辟了新途径。

1997年邓自旺等<sup>[6]</sup>根据Morlet小波变换系数的模、位相和实部分析了西安市近50年月降水量多时间尺度结构:6个月至1年尺度范围内,1980年1月~1984年12月有5个较明显的降水偏多和偏少区域组成准1年的周期振荡;2~8年尺度的周期变化在1950-1960年和1975年以后较强;20~40年尺度的周期变化明显且存在于整个时间域。同时还能判别降水序列中所包含突变点的存在性和位置,如西安1952、1959、1964、1976和1984年降水有异常。

胡增臻等<sup>[7]</sup>利用WT(Mexican hat小波)研究了华北夏季降水变化对时间尺度的依赖性。研究表明,华北夏季降水在不同年代起主导作用的时间尺度有明显差异。例如,1945-1960年,4~7年尺度变化很明显,而在1891-1905年和1920-1960年年代尺度变化十分明显,功率谱无法给出这样的结果。笔者发现,不同尺度的降水变化与不同的500 hPa异常环流型相联系。

1998年纪忠萍等<sup>[8]</sup>通过对1994年6月广东省洪涝期间南雄与电白两站逐时地面降水、气压和温度的小波分析,清楚地将影响两站的不同尺度的扰动显示出来,利用小波方差图可帮助确定该时间段的主要天气系统。指出在有利的大尺度背影条件下,中小尺度天气系统的发生发展是产生暴雨的直接原因。1999年利用Marr小波变换对广州前汛期降水、后汛期降水和全年逐月降水量的多时间尺度进行了分析<sup>[9]</sup>,发现广州降水存在28年、7年、2年的主要周期,前汛期降水存在25年、2年的主要周期,后汛期降水存在23年、9年、2年的主要周期。小波分析不仅可以将隐含在降水序列中各种随时间变化的周期振荡清楚地显现出来,也可以反映它们的变化趋势,对其未来的演变趋势作出定性估计。

1999年杨辉等<sup>[10]</sup>通过Morlet小波变换法分析了华北地区的水资源各分量( $P$ 、 $E$ 及可利用降水 $P-E$ )的时间-频率的多层次结构和突变特征:它们具有相似的周期演变特征,主要年代际变化周期有2~3年、5~6年,在20世纪50年代中期到70年代初以及到90年代初明显,主要年代际尺度周期是15年,在70年代后期明显; $P$ 、 $E$ 和 $P-E$ 都有两个明显的突变点。

2000年孙力等<sup>[11]</sup>用小波变换法分析了中国东北地区夏季降水异常情况。孙卫国等<sup>[12]</sup>用Morlet小波变换法分析了河南省近50年来月降水量距平序列的多时间尺度结构,对其旱、涝时频变化特征进行了初步研究。结果表明,河南降水除具有6~9个月的自然周期变化外,还存在准2年、4~8年的中小时间尺度和20年左右的大时间尺度周期变化,且小时间尺度周期变化在所讨论的时间域中是不均匀分布。2000年谢庄等用Marr小波变换分析了北京近百年的气候变化<sup>[13]</sup>。段旭等用Marr小波变换法研究了云南旱涝时空变化特征<sup>[14]</sup>:在32年时间尺度上,云南旱涝变化最显著,其中30~50年代降水偏少,60~80年代中期降水偏多。

2001年姚建群<sup>[15]</sup>用上海地区1900~1999年月降水,用Marr小波及Morlet小波变换法分析了上海地区近百年冬、夏季降水时间-频率的多层次时间尺度演变特征及其突变特征。结果表明,其年际及年代季时间尺度的周期变化在时间域中分布不均匀,具有很强的局部化特征。

郑显等<sup>[16]</sup>将WT引入随机水文过程研究领域,根据水文现象的物理成因,对水文序列进行小波变换,借以测定水文序列隐含的近似周期。计算结果表明,其确定的近似周期准确性较高。本文作者用小波变换法分析了长江宜昌站年径流量多时间尺度变化:宜昌近100年年径流在不同时段表现出不同的周期变化及突变点的位置及分布。

## 2.2 小波分析在水文时间序列变化特性上的应用

小波分析在水文水资源时间序列变化特性上的应用包括两方面的内容:一是奇异性检测,二是过程特性定量表征。

根据小波变换良好的时、频局部化特性,确定时间序列奇异点的分布情况及位置和强弱,进而准确地将之去掉。文献[17](1996)以具有紧支集的二次样条函数作为小波基,采用Mallat算法对地震信号进行分解;通过小波变换模极大值与给定阈值比较,从而进行奇异点监测。文献[18](1997)介绍了调频高斯小波并用于心电图信号处理中,研究表明它能正确识别正常与不正常心电图。文献[19](1998)应用Daubechis小波采用二进尺度小波变换的Mallat算法提取局部放电信号,数值仿真研究表明这种途径是可行的。水文水资源这方面开展的工作不多。

水文过程变化复杂,有许多这方面的研究,如不均匀系数、分维数和Hurst系数等。随着小波理论的出现,小波变换法在过程变化特性定量表征上显示出巨大的优势。李贤彬等<sup>[20]</sup>基于Mallat算法给出了表征水文过程变化特征的信息量系数,同时与不均匀系数、分维数进行了比较。以年、月平均流量过程和汛期日流量过程为例,研究表明,信息量系数从频率能量分布出发刻画过程变化的复杂程度:水文过程越复杂,信息量系数越大;反之亦然。文献[21]提出了基于小波变换的分形时间序列分维数的估计方法。笔者用该法计算了宜昌站1966-1986年汛期(5~10月)日流量序列的分维数,其值为1.46。文献[22]提出了基于Mallat小波变换的Hurst系数估计方法,估计量是半参数无偏估计量。李贤彬等<sup>[23]</sup>在此基础上以中国5条河流洪峰流量资料为例进行了研究,借助小波分析揭示水文序列的长持续性结构。

## 2.3 小波分析在水文预测预报中的应用

近十多年来,出现了许多新理论新方法并在水文水资源预测预报中得到了广泛应用。将它们相互耦合并结合传统预测预报技术,将是现代水文预测的发展方向。小波分析与分形、混沌、ANN、随机理论结合,不失一种有效途径。

1997年文献[21]将小波分析与分形结合构建了一种关于分形时间序列预测的模型。Cao等<sup>[24]</sup>(1995)将小波分析与混沌、ANN结合建立了小波网络模型对具有混沌特征的时间序列进行了短期和长期预测并获得了成功。文献[25](1997)基于小波分析、混沌和ANN构造了混沌小波网络模型,用该模型对金沙江屏山站汛期日流量序列和长江宜昌站汛期日流量序列进行了长期预测研究,文中还与多元回归模型作了比较。尤卫红等<sup>[26]</sup>将小波分析与混沌耦合建立了不同时间尺度的气候预测模型,对滇中月降水距平值在月、季、年三种尺度上进行了预测。

李贤彬等<sup>[27]</sup>将ANN与小波耦合,提出了基于小波变换序列的ANN组合预测模型:首先对水文序列施行A Troux小波变换,再利用ANN对小波系数进行多尺度组合预测,最后对预测分

过程重构即得原始水文序列预测。文中以宜昌站年平均流量作了研究,表明预测效果理想。金龙等<sup>[28]</sup>基于 ANN 与小波的优点提出了多步预测的小波神经网络预报模型,研究成果表明,建议模型对历史样本具有很好的拟合效果,独立样本的预报结果也令人满意。

#### 2.4 小波分析在水文随机模拟中的应用

水文随机模拟是水科学研究的一项重要内容。上述各种组合模型都可用于水文随机模拟。

文献 [29] 利用 A Trous 算法将日流量过程分解成几个小波系数和尺度系数,在水文时间序列显示的主周期(年)将小波变换序列分解成若干段,经随机抽样,获得无数组合,再由小波逆变换得到模拟日流量过程。以金沙江屏山站日流量为例,研究表明此法可行而有效。

笔者将小波分析与随机理论结合提出了基于小波变换的组合随机模型。以屏山站年径流过程为例建立了基于小波变换的组合随机模型和随机模拟研究,模型实用性检验表明是可行的。

### 3 小波分析在水文水资源中的应用研究展望

小波分析理论和方法处于发展阶段,还远未成熟。从已有的自然科学各领域应用看,WT 具有很大的潜力。WT 在水文水资源中的应用才开始,有许多工作需深入展开。

(1) 小波函数选择研究 小波函数不仅是小波理论的重要内容,也是水文水资源时间序列分析的前提和条件。探讨一种或多种适合于水文水资源分析计算和预测模拟的小波函数,是研究工作开展的关键。可从已有的小波函数中选取,或作适当修正,或重新构建新的小波函数。

(2) 小波变换算法研究 目前有塔式 Mallat 算法、流式 Mallat 和 A Trous 算法等多种算法,都比较成熟。在水文水资源中,研制两种快速小波变换算法是必要的:一是具有良好压缩功能的小波变换算法,对大量的水文水资源数据储存,可节省存储空间和时间,带来巨大经济效益;二是具有扫描特点、能准确跟踪数据流中每一点变化特性的小波变换算法,便于详细分析计算和预测水文水资源。

(3) 应用小波分析研究水文水资源多时间尺度变化 小波变换具有时-频局部化特征,能准确地找到时间序列的大小时间尺度(周期)和突变点,判断所处的阶段。利用小波变换,揭示水文水资源时间序列多尺度特性,为水资源合理开发利用和优化配置提供有力的依据。

(4) 探讨小波变换奇异性检测和去噪方法在水文水资源中的应用。

(5) 进一步加强小波分析与分形、混沌、ANN、随机理论等耦合途径研究,充分发挥各自的优点,为水文水资源预测预报和随机模拟提供更有效、更精确的模型。

#### 参考文献:

- [1] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1995. 1 - 20.
- [2] 刘贵忠,等. 小波分析及应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1995. 2 - 30.
- [3] 李贤彬,丁晶,李后强,等. 子波分析及其在水文水资源中的潜在应用[J]. 四川联合大学学报(工程科学版), 1997, 1(4): 49 - 52.
- [4] Kumar P, Foufoula-Georgiou E. A multicomponent decomposition of spatial rainfall fields 1. segregation of Large- and Small - Scale features using Wavelet transforms[J]. Water Resources Research. 1993, 29(8): 2515 - 2532.
- [5] Venckp V, Foufoula-Georgiou E. Energy decomposition of rainfall in the time-frequency-scale domain using wavelet packets[J]. Journal of Hydrology, 1996, 27(3): 3 - 27.
- [6] 邓自旺,等. 西安市近 50 年来气候变化多时间尺度分析[J]. 高原气象, 1997, 16(1): 81 - 93.
- [7] 胡增臻,石伟. 子波变换在大气科学中的应用研究[J]. 大气科学, 1997, 21(1): 58 - 71.

- [8] 纪忠萍, 等. 1994 年 6 月广东省特大洪涝期间气象要素的小波分析[J]. 热带气象学报, 1998, 14, 148 - 155.
- [9] 纪忠萍, 谷德军. 广州近百年来气候变化的多时间尺度分析[J]. 热带气象学报, 1999, 15(1) :48 - 55.
- [10] 杨 辉, 宋亚山. 华北地区水资源多时间尺度分析[J]. 高原气象, 1999, 18(4) :496 - 507.
- [11] 孙 力, 等. 中国东北地区夏季降水异常的气候分析[J]. 气象学报, 2000, 58(1) :72 - 80.
- [12] 孙卫国, 程炳岩. 河南省近 50 年来旱涝变化的多时间尺度分析[J]. 南京气象学院学报, 2000, 23(1) :251 - 255.
- [13] 谢 庄, 曹鸿兴. 近百年北京气候变化的小波特征[J]. 气象学报, 2000, 58(3) :362 - 369.
- [14] 段 旭, 等. 云南旱涝特征[J]. 高原气象, 2000, 19(1) :84 - 89.
- [15] 姚建群. 连续小波变换在上海近 100 年降水分析中的应用[J]. 气象学报, 2001, 27(1) :20 - 24.
- [16] 郑 显, 张闻胜. 基于小波变换的水文序列的近似周期检测法[J]. 水文, 1999, 19(6) :22 - 25.
- [17] 段虞荣, 等. 小波分析在油气田地球物理勘探中的应用[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 1996, 19(6) :44 - 53.
- [18] 张 河, 张 庆. 调频高斯小波变换及其程序[J]. 信号处理, 1997, 13(3) :221 - 226.
- [19] 王 航, 等. 用小波变换提取局部放电信号[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1998, 38(6) :119 - 122.
- [20] 李贤彬, 丁 晶, 等. 水文时间序列的子波分析法[J]. 水科学进展, 1999, 10(2) :144 - 149.
- [21] Shozo, Tokinaga, *et al.* Forecasting of time series with fractal geometry by using scale transformations and parameters estimation obtained by the wavelet transform, Electronics and Communications in Japan[J]. Parts3, 1997, 80(8) :20 - 30.
- [22] Abry P, Veitch D. Wavelet analysis of long-rang dependent on traffic[J]. IEEE Transactions on information Theros, 1999, 44(1) :2 - 15.
- [23] 李贤彬, 丁 晶, 等. 水文序列 Hurst 系数的子波估计法[J]. 水利学报, 200, 11(3) :30 - 34.
- [24] Cao Liangyue, *et al.* Predicting chaotic time series with wavelet network[J]. Physical D, 1995, 85 :225 - 238.
- [25] 赵永龙, 等. 混沌小波网络模型及其在水文中长期预测中的应用[J]. 水科学进展, 1998, 9(3) :252 - 287.
- [26] 尤卫红, 等. 小波变换在短期气候预测模型研究中的应用[J]. 高原气象, 1999, 18(1) :39 - 46.
- [27] 李贤彬, 丁 晶, 等. 基于子波变换序列的人工神经网络组合预测[J]. 水利学报, 1999, (2) ,1 - 4.
- [28] 金 龙, 等. 多步预测的小波神经网络预报模型[J]. 大气科学, 2000, 24(1) :71 - 86.
- [29] 王文圣, 等. 小波分析及其在日流量过程随机模拟中的应用[J]. 水利学报, 2000, (11) :43 - 48.

## Application and prospect of wavelet analysis in hydrology<sup>\*</sup>

WANG Wen-sheng, DING Jing, XIANG Hong-lian

( College of Hydraulic Engineering , Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract :** A new mathematical method , wavelet analysis which is called mathematical microscope , is introduced. Then the state of application and research of wavelet transform is introduced in the hydrology system , including four aspects : (1) time-frequency multiple time scales analysis of hydrological time series , (2) change properties of hydrological time series , (3) forecasting in hydrology , and (4) simulating of hydrological process. Finally , some trend and directions for future studies in hydrology and water resources are presented.

**Key words :** wavelet analysis ; fourier transform ; hydrology and water resource ; prospect

\* The project is supported by National Natural Science Fund of China (No. 50099620) .