

文章编号: 1001-6791 (2000) 01-0070-06

浅水湖泊风生流的迎风有限元数值模型研究

马生伟¹, 蔡启铭²

(1. 云南省环境科学研究所, 云南 昆明 650034; 2. 中国科学院南京地理与湖泊研究所, 江苏 南京 210008)

摘要: 从控制方程组出发, 以 Galerkin 有限元法为基础, 引入沿流线加权的权函数 (沿流线加权的迎风有限元法) 和选择性集中系数矩阵方法, 推导、建立了一适合于浅水湖泊风生流计算的二维迎风有限元数值模型。并以太湖为例, 对模型作了检验, 分析了均匀、定常风场持续作用下太湖风生流场的形态特征。

关键词: 浅水湖泊; 风生流; 数值模型; 迎风有限元法; 太湖

中图分类号: P 343.3 **文献标识码:** A

湖泊流场的数值模拟研究不仅是湖泊物理学研究的重要方面, 而且可以直接为湖泊水质模型提供湖泊水动力学背景。就湖泊边界模拟能力而言, 有限单元法较之有限差分法往往更为有效。但在以往的湖流、湖泊水质模型研究中, 有限元法的这一优势还没有得到充分的重视。

1 数值模型

1.1 控制方程组

基于一定的假设, 描述浅水湖泊平面二维风生流场变化的控制方程可写为^[1-3]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \xi)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \xi)v] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{(h + \xi)C_h^2} - \epsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho_a C_D}{\rho_w (h + \xi)} w^2 \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{(h + \xi)C_h^2} - \epsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho_a C_D}{\rho_w (h + \xi)} w^2 \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

收稿日期: 1998-10-05; 修订日期: 1999-01-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (49171017); 部分计算工作在中国科学院南京地理与湖泊研究所太湖站完成。

作者简介: 马生伟 (1971-), 男, 江苏灌南人, 云南省环境科学研究所工程师, 主要从事水环境模拟方面研究。

式中 $\xi(x, y, t)$ 为由平均湖水面算起的水面起伏高度; $u(x, y), v(x, y)$ 分别为湖流在 x, y 方向的分量; $h(x, y)$ 为平均湖面至湖底的深度; f 为 Coriolis 参数, $f = 2\omega \sin \varphi$ (ω 为地球自转角速度, φ 为计算区域的纬度); g 为重力加速度, C_h 为 Chezy 系数; C_D 为风的曳力系数; ρ_a, ρ_w 分别为空气和水的密度; W 为风速 (m/s); φ 为风向与 x 轴正方向 (正东向) 的夹角; ϵ 为水平涡动粘性系数; t 为时间变量; $H(x, y, t) = h(x, y) + \xi(x, y, t)$ 。

1.2 Galerkin 有限元的单元特征式

记 N 为求解区域结点总数, NE 为单元内结点数, Ω_e 为单元区域, Γ_e 为 Ω_e 的边界, $\varphi(x, y)$ 为基函数, 根据 Galerkin 有限元法^[1], 从控制方程组 (1) - (2) - (3) 可推导出单元特征式:

$$M_{\alpha\beta}^{(e)} \frac{d\xi_\beta}{dt} + C_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)}(h\gamma + \xi\gamma)u_\beta + C_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)}(h\gamma + \xi\gamma)v_\beta = B_\alpha^{(e)} \tag{4}$$

$$M_{\alpha\beta}^{(e)} \frac{du_\beta}{dt} + K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)}\gamma u_\beta + K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)}\gamma v_\beta + H_{x\alpha\beta}^{(e)}\xi_\beta + N_{\alpha\beta}^{(e)}u_\beta + R_{x\alpha\beta}^{(e)}v_\beta + S_{\alpha\beta}^{(e)}\tau_{\beta}^t = T_{x\alpha}^{(e)} \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}^{(e)} \frac{dv_\beta}{dt} + K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)}\gamma u_\beta + K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)}\gamma v_\beta + H_{y\alpha\beta}^{(e)}\xi_\beta + N_{\alpha\beta}^{(e)}v_\beta + R_{y\alpha\beta}^{(e)}u_\beta + S_{\alpha\beta}^{(e)}\tau_{\beta}^t = T_{y\alpha}^{(e)} \tag{6}$$

式中 α, β, γ 表示单元内结点 ($= 1, 2, \dots, NE$)

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \varphi_\beta d\Omega & C_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \varphi_\beta \varphi_\gamma d\Omega & C_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \varphi_\beta \varphi_\gamma d\Omega \\ B_\alpha^{(e)} &= - \int_{\Gamma_e} q_n \varphi_\alpha d\Gamma; & K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} d\Omega & K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} d\Omega \\ H_{x\alpha\beta}^{(e)} &= g \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} d\Omega & H_{y\alpha\beta}^{(e)} &= g \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} d\Omega & R_{x\alpha\beta}^{(e)} &= - f \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \varphi_\beta d\Omega \\ R_{y\alpha\beta}^{(e)} &= f \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \varphi_\beta d\Omega & T_{x\alpha}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \tau_x^s d\Omega + \int_{\Gamma_e} \epsilon \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} d\Gamma; & S_{\alpha\beta}^{(e)} &= M_{\alpha\beta}^{(e)}; \\ T_{y\alpha}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \varphi_\alpha \tau_y^s d\Omega + \int_{\Gamma_e} \epsilon \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} d\Gamma; & N_{\alpha\beta}^{(e)} &= \epsilon \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} \right) d\Omega & \tau_{ij}^t &= \frac{u_i \sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2 (h + \xi)}; \\ \tau_{ij}^b &= \frac{v_j \sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2 (h + \xi)}; & \tau_{ij}^s &= \frac{\rho_a C_D}{\rho_w (h + \xi)} W_j^2 \cos \varphi_j; & \tau_{ij}^t &= \frac{\rho_a C_D}{\rho_w (h + \xi)} W_j^2 \sin \varphi_j \end{aligned}$$

1.3 沿流线加权的迎风有限元法

当网格 Reynolds 数大于 2 时 (这是湖泊流场计算中较为普遍的情形), 如果权函数与基函数相同, 则前述 Galerkin 有限元法在计算中必将产生失真振荡。而克服这种失真振荡的方法一般为: (1) 通过加密计算单元或人为地加大湍流交换 (引入不合理的粘性) 以降低网格 Reynolds 数; (2) 通过引入不同于基函数的权函数 (即迎风有限元法) 来减小解的振荡。

以往使用的矩形单元或三角形单元上游加权有限元法, 上游权加在结点的连线上, 而这些连线 (即单元的边), 一般并不是流动方向, 沿这样的方向加上游权对减小解的振动的的作用往往不大, 反而会降低解的精度, 产生所谓的“侧风效应”。为克服侧风效应, A. N. Brooks 等 (1982) 提出了沿流线加权的权函数^[4]:

$$W = \varphi + \sigma \vec{\sigma} \cdot \nabla \varphi$$

(σ 为迎风系数, 与单元参数如单元尺度、网格雷诺数等有关)

A. Mizukami (1985) 在理论分析和数值试验的基础上给出了用单元矩阵构造的迎风系数^[5]:

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_{ii}}{\max_j |A_{ij}| + D_{ii}} \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, NE)$$

式中 \bar{M}_{ii} 为 $M_{\alpha\beta}^{(e)}$ 的集中系数矩阵^[6]; A_{ij} 、 D_{ii} 分别为 Galerkin 有限元法中的平流项单元矩阵和湍流交换项单元矩阵。

对流体流动问题, 为得到更为精确的解和减少计算量, 一般仅对平流项 ($\vec{v} \cdot \nabla u$, $\vec{v} \cdot \nabla v$) 的权函数作特殊处理, 其他各项的权函数仍用基函数。则平流项的单元矩阵可以表示为 (σ 为迎风系数)。

$$K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)} = K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)} + \int_{\Omega_e} \alpha_x \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} \left(u \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} \right)$$

$$K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)} = K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)} + \int_{\Omega_e} \alpha_y \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \left(u \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} \right)$$

1.4 沿流线加权的迎风有限元数值模式的总体有限元方程组

以 $K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)}$ 代替 $K_{x\alpha\beta\gamma}^{(e)}$, 以 $K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)}$ 代替 $K_{y\alpha\beta\gamma}^{(e)}$, 单元特征式(4)-(5)-(6)总体合成则得如下的总体有限元方程组:

$$M_{mm} \frac{d\xi_m}{dt} + C_{xmi}(h_l + \xi_l)u_m + C_{ymi}(h_l + \xi_l)v_m = B_{an} \quad (7)$$

$$M_{mm} \frac{du_m}{dt} + K_{xmi}u_l u_m + K_{ymi}u_l v_m + H_{xmi}\xi_m + R_{xmi}v_m + S_{mi}\tau_{xm} = T_{xn} \quad (8)$$

$$M_{mm} \frac{dv_m}{dt} + K_{xmi}v_l u_m + K_{ymi}v_l v_m + H_{ymi}\xi_m + R_{ymi}u_m + S_{mi}\tau_{ym} = T_{yn} \quad (9)$$

式中 n, m, l 表示计算区域的结点 ($= 1, 2, \dots, N$)

1.5 选择性集中系数矩阵方法及时间积分方案

针对求解总体有限元方程组(7)-(8)-(9)工作量较大、计算机内存要求较高等问题, 本模型采用了选择性集中系数矩阵方法^[6], 结合两步显式Lax-Wendroff时间积分方案, 求解公式可写为

$$\text{第一步} \quad \bar{M}_{mm} \xi_m^{+\Delta t/2} = \tilde{M}_{mm} \xi_m^t + \Delta t/2 \cdot F_1(\xi, u^t, v^t)$$

$$\bar{M}_{mm} u_m^{+\Delta t/2} = \tilde{M}_{mm} u_m^t + \Delta t/2 \cdot F_2(\xi, u^t, v^t)$$

$$\bar{M}_{mm} v_m^{+\Delta t/2} = \tilde{M}_{mm} v_m^t + \Delta t/2 \cdot F_3(\xi, u^t, v^t)$$

$$\text{第二步} \quad \bar{M}_{mm} \xi_m^{+\Delta t} = \tilde{M}_{mm} \xi_m^t + \Delta t \cdot F_1(\xi^{+\Delta t/2}, u^{+\Delta t/2}, v^{+\Delta t/2})$$

$$\bar{M}_{mm} u_m^{+\Delta t} = \tilde{M}_{mm} u_m^t + \Delta t \cdot F_2(\xi^{+\Delta t/2}, u^{+\Delta t/2}, v^{+\Delta t/2})$$

$$\bar{M}_{mm} v_m^{+\Delta t} = \tilde{M}_{mm} v_m^t + \Delta t \cdot F_3(\xi^{+\Delta t/2}, u^{+\Delta t/2}, v^{+\Delta t/2})$$

式中 Δt 为时间步长; \bar{M}_{mm} , \tilde{M}_{mm} 分别为集中系数矩阵和选择性集中系数矩阵; F_1, F_2, F_3 , 可由方程组(7)-(8)-(9)整理得出。

理论分析及实际计算表明, 本模型的稳定性条件可写为: $\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{U + \sqrt{gH_{\max}}}$ 其中, ϵ 为经验常数, 值约 1.2~1.5; U 为最大流速; H_{\max} 为最大水深。

1.6 模型特点

由如上的推导可以看出, 这一模型较之以往的浅水湖泊风生流模型, 具有以下特点:

- (1) 在风生流控制方程组中保留了平流项、二阶粘性项, 从而使模型在物理学上较为合理、严谨;
- (2) 以迎风有限元法对控制方程组进行空间离散, 一方面即使网格雷诺数大于 2 时可以消除失真震荡, 另一方面使模型的边界适应性较强;
- (3) 引入沿流线加权的权函数, 克服了一般迎风有限元法中的侧风效应;
- (4) 使用选择性集中系数矩阵方法, 减少了计算工作量;
- (5) 采用两步显式 lax-Wendroff 时间离散方案, 一定程度上提高了计算的稳定性。

2 模型在太湖的应用

太湖位于 $N 30^{\circ} 35' 40'' \sim 31^{\circ} 32' 58''$, $E 119^{\circ} 32' 32'' \sim 120^{\circ} 36' 10''$ 。水面面积 $2\,338.1\text{km}^2$, 平均水深 1.9m , 是我国五大淡水湖之一。根据以往的研究成果及太湖的实际情况^[3,7,8], 计算中选取的参数为: Chezy 系数, $C_h = \frac{1}{h} R^{\frac{1}{6}}$, R 为水力半径 (以水深近似代替), n 为 Manning 系数, 取 0.015 ; 水平涡动粘性系数 ϵ 取 $60\text{m}^2/\text{s}$; 风应力系数 C_D 取 0.025 ; $e = 0.75$; $\Delta t = 200\text{s}$ 。对湖-陆边界, 采用滑动边界条件, 即不可穿透边界, 即 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$; 对湖-河边界, 采用自由边界。

计算中全湖共分为 833 个三角形单元, 共布设 505 个结点, 其中 177 个边界结点。本文采用了非定常的控制方程组求解定常解的方法来研究稳定、均匀风场持续作用下稳定的太湖风生流场特征, 初始场选为: 所有点的 ζ , u , v 均为 0。分别计算了对应于 W、SW、S、E、NE、SE 和 NW 方向风场 (风速分别取 5m/s 和 10m/s) 的太湖风生流场。计算结果表明, 太湖风生流场的主要特征为:

- (1) 在相同条件下, 太湖各水域的流速差异较大, 可达一个量级以上。一般近岸区域的流速高于远岸区和湖心区, 这在西岸尤为明显, 存在较强的沿岸流。

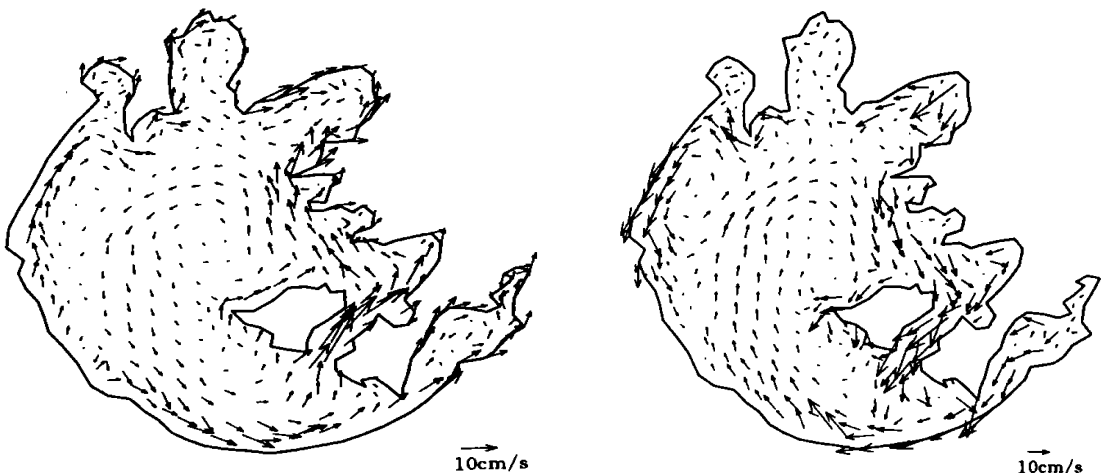


图 1 太湖逆时针环流主导型流场 (10m/s, SW) 图 2 太湖顺时针环流主导型流场 (10m/s, NE)

Fig. 1. Stable current field (wind field: 10m/s, SW) Fig. 2. Stable current field (wind field: 10m/s, NE)

- (2) 根据环流的方向及范围, 太湖环流形势可分为三种类型: 对应于 SW、S 和 W 风的

逆时针环流主导型流场, 主要特征是太湖水体为较强盛的逆时针环流所控制, 其范围也较大, 而近西岸的顺时针环流则相对弱得多, 范围较小(图 1); 对应于 NE、N 和 E 风的顺时针环流主导型流场, 其主要特征与逆时针环流主导型流场相似, 只是环流方向相反(图 2); 对应于 SE 和 NW 风的过渡型流场, 其主要特征为顺时针环流和逆时针环流都明显存在, 但都不占明显优势, 属上述两种类型的中间过渡。

(3) 风生流场的形态与风速关系不密切, 风速主要决定了流速的大小。

将本文的计算结果与 1987 年 5 月和 1988 年 3 月太湖流场的实测结果^[3]相比较, 可以发现总的规律较为一致。

3 结 论

(1) 通过在 Galerkin 法中引入沿流线加权的迎风有限元法和选择性集中系数矩阵方法, 建立大型浅水湖泊风生流的迎风有限元数值模型是可行的。

(2) 本文建立的浅水湖泊风生流二维迎风有限元数值模型对获得较为稳定和精确的解以及减少有限元的计算工作量较为合理、有效。

(3) 太湖风生流场可以划分为逆时针环流主导型、顺时针环流主导型和过渡型三种类型。

参考文献:

- [1] Pinder G F, et al Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology [M]. London: Academic Press NC (London), 1977, 25~ 96
- [2] 崔广柏 湖泊水库水文学[M] 南京: 河海大学出版社, 1990 1~ 162
- [3] 孙顺才等 太湖[M] 北京: 海洋出版社, 1993 100~ 120
- [4] Brooks A N, et al Stream line upwind/Petrov-Galerkin for convection dominated flow with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 32: 199~ 259
- [5] Mizukami A. An implementation of the Stream line-Upwind/Petrov-Galerkin method for linear triangular elements [J]. Comput Meths Appl Mech Engrg, 1985, 49: 357~ 364
- [6] Kawahara M, et al Selective lumping finite element methods for shallow water flow [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1982, 2: 82~ 112
- [7] 王谦谦 太湖风生流的数值模拟[J] 河海大学学报 1987, 15(增刊 2): 11~ 18
- [8] 梁瑞驹, 仲金华, 等. 太湖风生流的三维数值模拟[J] 湖泊科学: 1994, 6(4): 289~ 297.
- [9] Kawahara M, et al Two step explicit finite element method for tsunami wave propagation analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1978, 12: 331~ 351

Study on Upwinding Finite Element Numerical Model for Wind-Driven Current in Shallow Lakes^{*}

MA Sheng-wei¹, CAIQiming²

(1. Yunnan Institute of Environmental Science, Kunming 650034, China; 2. Nanjing Institute of
Geography & Limnology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008, China)

Abstract: Based on Galerkin finite element method, a new upwinding finite element numerical model suitable for modeling wind-driven current in shallow lakes is derived by introducing streamline-upwinding method and the selective lumping coefficient matrix scheme. Moreover it is applied to Taihu Lake, and the morphological characteristic of wind-driven current is discussed.

Key words: shallow lakes; wind-driven current; numerical simulation; upwinding finite element method; Taihu Lake

《水科学进展》刊登的论文被美国《工程索引》(Ei) 收录数大增

2000 年伊始, 经有关网站数据库文档检索, 在本刊发表的论文被美国《工程索引》(Ei) 收录的仅 1999 年已达 30 余篇, 较以前有较大增长, 同时美国的《ME》(Medical Engineering) 78# DLALOG Source oneSM: Engineering 亦开始收录本刊刊登的有关论文。这一喜讯, 无疑对本刊的论文作者、读者和编者都是很大的鼓舞和鞭策。在新千年中, 为了让世界了解中国的水科学研究成果, 让我们共同努力, 使更多的优秀论文被世界科技检索系统收录。

《水科学进展》编辑部

* The Project is Supported by National Natural Science Fund of China (No. 49171017).