

梯级水库设计洪水最可能地区组成法计算通式

刘章君, 郭生练, 李天元, 徐长江

(武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 水资源安全保障湖北省协同创新中心, 湖北 武汉 430072)

摘要: 利用 Copula 函数建立各分区洪水的联合分布, 基于联合概率密度最大原则, 推导得到最可能地区组成法的计算通式, 并用来推求梯级水库下游断面的设计洪水。选择清江流域水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库为例, 开展了验证和方法比较研究。结果表明: 最可能地区组成法计算得到的设计洪水值位于同频率地区组成法多方案计算结果的区间之内; 受清江梯级水库调洪的影响, 宜都断面设计洪水的削峰率十分显著, 最可能地区组成法推求 100 年一遇设计洪水的削峰率达到 30.2%。该法具有较强的统计基础, 组成方案唯一, 结果合理可行, 为复杂梯级水库设计洪水的计算提供了一种新途径。

关键词: 设计洪水; 梯级水库; 最可能地区组成法; 计算通式; Copula 函数; 清江流域

中图分类号: TV122.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-6791(2014)04-0575-10

中国主要江河大多数已经形成了梯级开发的格局, 梯级水库的调洪作用对下游防洪断面设计洪水的影响是亟待解决的问题, 其核心是推求防洪断面以上各分区洪水的地区组成。目前的分析计算方法主要有地区组成法、频率组合法、随机模拟法及 JC 法^[1-2]。地区组成法计算比较简便, 易于掌握, 但未能充分考虑洪水的空间相关性和地区组成的随机性^[3]。频率组合法能较好地反映水库对不同概率洪水的调洪效应, 其对各分区洪水频率曲线的精度要求较高且求解复杂。随机模拟法不必考虑复杂的组成遭遇问题, 计算成果精度主要取决于所建立的模型是否合理。JC 法从风险角度拟定一种不利的地区组成, 但目前国内外在可接受风险方面并无相关参考, 将给决策带来困难。以上方法在计算单个或两个水库影响下的设计洪水时具有一定的操作性和可靠性。然而, 对于 3 个及以上水库的情形, 由于涉及到多水库多区间的复杂情况, 这些方法的计算工作量将大大增加且精度难以控制, 可行性和合理性受到质疑^[4-6]。因此, 有必要研究通用有效的新方法来解决复杂梯级水库设计洪水的计算问题。

在工程设计中, 人们通过对实际发生洪水的时空特性规律分析, 通常关心最可能发生且对下游防洪偏不利的地区组成。谭维炎和黄守信^[7]从发生可能性最大的角度提出了一种代表性很好的地区组成, 即最可能地区组成。该地区组成具有以下特征: ① 在所有可能的地区组成方案中, 其发生的可能性最大; ② 基于各分区洪水的联合概率密度最大原则得到, 其方案数是唯一的, 不随水库数量的增加而增加。受到联合概率分布函数和密度函数求解的限制, 文献[7]仅推求了各分区洪水相互独立情况下的最可能地区组成计算公式。Copula 函数可以描述水文变量的相关性结构, 灵活地构造边缘分布为任意分布的水文变量联合分布, 近年来在水文领域得到了广泛应用^[8-10], 为最可能地区组成的求解提供了有力工具。闫宝伟等^[11]利用 Copula 函数推导了考虑各分区洪水空间相关性的最可能地区组成计算公式。然而, 文献[7]和文献[11]均只限于单个水库的最可能地区组成分析计算, 对于梯级水库尚未涉及, 难以满足工程实际需求。本文将利用 Copula 函数推导基于最可能地区组成法推求梯级水库设计洪水的计算通式, 选取清江流域水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库为例进行验证, 以期为复杂梯级水库设计洪水的计算提供一种新途径。

收稿日期: 2014-01-07; 网络出版时间: 2014-05-29

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/32.1309.P.20140529.1803.011.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51190094; 51079100)

作者简介: 刘章君(1991—), 男, 江西吉安人, 博士研究生, 主要从事水文分析与计算等方面的研究。

E-mail: liuzhangjun@whu.edu.cn

1 梯级水库设计洪水的最可能地区组合法

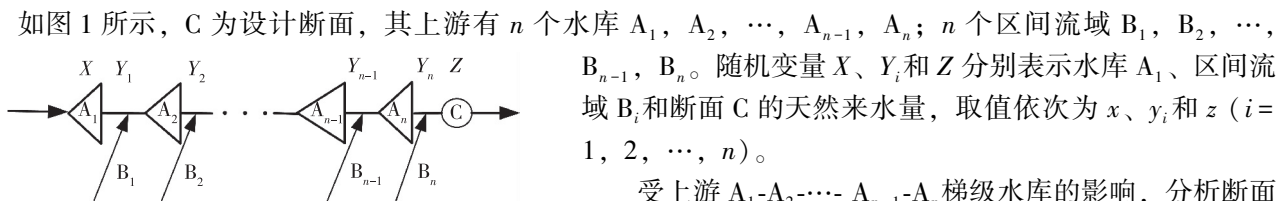


图 1 梯级水库示意

Fig. 1 Sketch diagram of cascade reservoirs

如图 1 所示, C 为设计断面, 其上游有 n 个水库 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$; n 个区间流域 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ 。随机变量 X, Y_i 和 Z 分别表示水库 A_1 、区间流域 B_i 和断面 C 的天然来水量, 取值依次为 x, y_i 和 z ($i = 1, 2, \dots, n$)。

受上游 $A_1-A_2-\dots-A_{n-1}-A_n$ 梯级水库的影响, 分析断面 C 设计洪水的地区组成需要研究天然情况下水库 A_1 断面和 n 个区间 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ 共 $(n+1)$ 个部分洪水的组合。由于河网调节等因素的影响, 往往难以推求设计

洪峰流量的地区组成, 且对调洪能力大的水库, 洪量起主要作用。因此, 通常将断面 C 某一设计频率 p 的时段洪量 z_p 分配给上游 $(n+1)$ 个组成部分, 以研究梯级水库的调洪作用。由水量平衡原理得

$$x + \sum_{i=1}^n y_i = z_p \quad (1)$$

式中 z_p 为断面 C 的天然设计洪量; x, y_i 分别为水库 A_1 、区间 B_i 相应的天然洪量。

设计洪水的地区组成本质上是给定断面 C 的设计洪量 z_p , 在满足式(1)约束条件下分配 z_p , 得到组合 $(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 。得到洪量分配结果后, 可以从实际系列中选择有代表性的典型年, 放大该典型年各分区的洪水过程线可得各分区相应的设计洪水过程线, 然后输入到 $A_1-A_2-\dots-A_{n-1}-A_n$ 梯级水库系统进行调洪演算, 就可以推求出同一频率 p 断面 C 受上游梯级水库调蓄影响的设计洪水值^[4]。

理论上, 满足式(1)约束的洪量组合 $(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 有无数种可能, 但不同组合推求的断面 C 受上游梯级水库影响的设计洪水值不同。因此, 如何选择合适的地区组成方法来计算洪量组合至关重要。同频率地区组合法是目前使用最为广泛的方法, 但该法只是一种人为假设, 是否符合流域洪水地区组成规律, 要视分区与设计断面洪水的相关性密切程度而定。此外, 随水库数量的增加, 需要拟定的地区组成方案数呈指数倍增长, 计算工作量将急剧增加, 难以满足复杂梯级水库设计洪水计算的实际需要。

在工程设计中, 人们通过对实际发生洪水的时空特性规律分析, 通常关心最可能发生且对下游防洪不利的地区组成。因此, 为了避免组合的任意性和盲目性, 本文从发生可能性最大的角度, 推导梯级水库设计洪水的最可能地区组成的计算通式。

不同洪量组合发生的相对可能性大小, 可以用 X 和 Y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的联合概率密度函数值 $f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 大小来度量。联合概率密度函数值越大, 表明该地区组成发生的可能性越大。欲得到最可能地区组成, 即为求解 $f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 在满足式(1)条件下的最大值, 即

$$\begin{cases} \max & f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \\ \text{s.t.} & x + \sum_{i=1}^n y_i = z_p \end{cases} \quad (2)$$

X 和 Y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的联合分布函数用 $F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 表示, 表达式如下:

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = P(X \leq x, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \quad (3)$$

相应的概率密度函数为

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = \partial^{n+1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) / \partial x \partial y_1 \dots \partial y_n \quad (4)$$

中国一般假定 X 和 Y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 均服从 P-III 型分布^[1], 且各变量之间还存在一定的相关性。若用传统方法来确定 $(n+1)$ 个随机变量的联合概率分布函数和密度函数的解析表达式, 非常困难。近年来 Copula 函数理论的应用和日趋完善使之成为可能, 能够灵活地构造具有任意边缘分布的多变量联合分布^[8]。

2 基于 Copula 函数推导最可能地区组成的计算通式

2.1 基于 Copula 函数的多维联合分布

假设随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的边缘分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i) = P_{X_i}(X_i \leq x_i)$, 其中 n 为随机变量的个数, x_i 为随机变量 X_i 的取值, $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布函数, 则存在唯一的 Copula 函数使得^[8]

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = C(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (5)$$

式中 $u_i = F_{X_i}(x_i)$, 在区间 $[0, 1]$ 上连续。

应用 Copula 函数建模时, 可分为两步: ① 确定随机变量各自的边缘分布; ② 根据各变量的边缘分布, 选取适当的 Copula 函数, 准确地描述边际分布间的相关结构。关于 Copula 函数形式及其选取和参数估计等一系列问题, 相关文献已有详细介绍, 此处不再赘述。

2.2 最可能地区组合法的计算通式推导

借助 Copula 函数, 联合分布函数 $F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 可以表示为^[12]

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = C(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) \quad (6)$$

式中 $C(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ 为 Copula 函数; $u = F_X(x)$ 、 $v_i = F_{Y_i}(y_i)$ 分别为水库 A_1 、区间 B_i 洪水的边缘分布函数。

相应的联合概率密度函数^[12]:

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = c(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) f_X(x) \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) \quad (7)$$

式中 $c(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) = \partial^{n+1} C(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) / \partial u \partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_{n-1} \partial v_n$ 为 Copula 函数的密度函数; f_X 、 f_{Y_i} 分别为 X 和 $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的概率密度函数。

将 $x = z_p - \sum_{i=1}^n y_i$ 代入 $f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 得

$$f\left(z_p - \sum_{i=1}^n y_i, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n\right) = c\left(F_X\left(z_p - \sum_{i=1}^n y_i\right), F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2), \dots, F_{Y_{n-1}}(y_{n-1}), F_{Y_n}(y_n)\right) f_X\left(z_p - \sum_{i=1}^n y_i\right) \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) \quad (8)$$

欲使 $f\left(z_p - \sum_{i=1}^n y_i, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n\right)$ 取最大值, 需满足:

$$\frac{\partial f\left(z_p - \sum_{i=1}^n y_i, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n\right)}{\partial y_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

由于式(9)的求解比较复杂, 先研究 $n=1, 2, 3$ 的情况, 再归纳出由 n 个水库组成的梯级防洪系统设计洪水最可能地区组成的计算通式。

(1) $n=1$ 由式(1)和式(9)联立求解, 化简后得到如下方程组^[11]:

$$\begin{cases} c_1 f_X(x) - c_2 f_{Y_1}(y_1) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_1}(y_1)}{f_{Y_1}(y_1)} \right] = 0 \\ x = z_p - y_1 \end{cases} \quad (10)$$

式中 $c = c(u, v_1) = \partial^2 C(u, v_1) / \partial u \partial v_1$; $c_1 = \partial c / \partial u$; $c_2 = \partial c / \partial v_1$; f'_X 和 f'_{Y_1} 分别为相应密度函数的导函数。

(2) $n=2$ 化简后得到如下方程组:

$$\begin{cases} c_1 f_X(x) - c_2 f_{Y_1}(y_1) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_1}(y_1)}{f_{Y_1}(y_1)} \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_3 f_{Y_2}(y_2) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_2}(y_2)}{f_{Y_2}(y_2)} \right] = 0 \\ x = z_p - \sum_{i=1}^2 y_i \end{cases} \quad (11)$$

式中 $c = c(u, v_1, v_2) = \partial^3 C(u, v_1, v_2) / \partial u \partial v_1 \partial v_2$; $c_1 = \partial c / \partial u$; $c_2 = \partial c / \partial v_1$; $c_3 = \partial c / \partial v_2$; f'_X 、 f'_{Y_1} 和 f'_{Y_2} 分别为相应密度函数的导函数。

(3) $n=3$ 化简后得到如下方程组:

$$\begin{cases} c_1 f_X(x) - c_2 f_{Y_1}(y_1) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_1}(y_1)}{f_{Y_1}(y_1)} \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_3 f_{Y_2}(y_2) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_2}(y_2)}{f_{Y_2}(y_2)} \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_4 f_{Y_3}(y_3) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_3}(y_3)}{f_{Y_3}(y_3)} \right] = 0 \\ x = z_p - \sum_{i=1}^3 y_i \end{cases} \quad (12)$$

式中 $c = c(u, v_1, v_2, v_3) = \partial^4 C(u, v_1, v_2, v_3) / \partial u \partial v_1 \partial v_2 \partial v_3$; $c_1 = \partial c / \partial u$; $c_2 = \partial c / \partial v_1$; $c_3 = \partial c / \partial v_2$; $c_4 = \partial c / \partial v_3$; f'_X 、 f'_{Y_1} 、 f'_{Y_2} 和 f'_{Y_3} 分别为相应密度函数的导函数。

从以上结果看出, $n=1 \sim 3$ 时最可能地区组成的满足方程组有明显的客观规律, 可以归纳得到 n 为任意正整数时的方程组通式为

$$\begin{cases} c_1 f_X(x) - c_2 f_{Y_1}(y_1) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_1}(y_1)}{f_{Y_1}(y_1)} \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_3 f_{Y_2}(y_2) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_2}(y_2)}{f_{Y_2}(y_2)} \right] = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_X(x) - c_n f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_{n-1}}(y_{n-1})}{f_{Y_{n-1}}(y_{n-1})} \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_{n+1} f_{Y_n}(y_n) + c \left[\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} - \frac{f'_{Y_n}(y_n)}{f_{Y_n}(y_n)} \right] = 0 \\ x + \sum_{i=1}^n y_i - z_p = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中 $c = c(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$; $c_1 = \partial c / \partial u$; $c_{i+1} = \partial c / \partial v_i$; f'_X 、 f'_{Y_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为相应概率密度函数的导函数。

若 X 和 Y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 均服从 P-III 分布, 其概率密度函数为^[1]

$$f_X(x) = \frac{\beta_x^{\alpha_x}}{\Gamma(\alpha_x)} (x - \gamma_x)^{\alpha_x - 1} e^{-\beta_x(x - \gamma_x)} \quad (14)$$

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{\beta_{y_i}^{\alpha_{y_i}}}{\Gamma(\alpha_{y_i})} (y_i - \gamma_{y_i})^{\alpha_{y_i}-1} e^{-\beta_{y_i}(y_i-\gamma_{y_i})} \quad (15)$$

式中 α_x 、 β_x 、 γ_x 和 α_{y_i} 、 β_{y_i} 、 γ_{y_i} 分别为变量 X 和 Y_i 形状、尺度和位置参数; $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数。

因此

$$f'_X(x) = \frac{\beta_x^{\alpha_x}}{\Gamma(\alpha_x)} (x - \gamma_x)^{\alpha_x-2} e^{-\beta_x(x-\gamma_x)} [(\alpha_x - 1) - \beta_x(x - \gamma_x)] \quad (16)$$

$$f'_{Y_i}(y_i) = \frac{\beta_{y_i}^{\alpha_{y_i}}}{\Gamma(\alpha_{y_i})} (y_i - \gamma_{y_i})^{\alpha_{y_i}-2} e^{-\beta_{y_i}(y_i-\gamma_{y_i})} [(\alpha_{y_i} - 1) - \beta_{y_i}(y_i - \gamma_{y_i})] \quad (17)$$

故

$$\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} = \frac{\alpha_x - 1}{x - \gamma_x} - \beta_x \quad (18)$$

$$\frac{f'_{Y_i}(y_i)}{f_{Y_i}(y_i)} = \frac{\alpha_{y_i} - 1}{y_i - \gamma_{y_i}} - \beta_{y_i} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)代入式(13), 则可表述为

$$\begin{cases} c_1 f_X(x) - c_2 f_{Y_1}(y_1) + c \left[\frac{\alpha_x - 1}{x - \gamma_x} - \frac{\alpha_{y_1} - 1}{y_1 - \gamma_{y_1}} + \beta_{y_1} - \beta_x \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_3 f_{Y_2}(y_2) + c \left[\frac{\alpha_x - 1}{x - \gamma_x} - \frac{\alpha_{y_2} - 1}{y_2 - \gamma_{y_2}} + \beta_{y_2} - \beta_x \right] = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_X(x) - c_n f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) + c \left[\frac{\alpha_x - 1}{x - \gamma_x} - \frac{\alpha_{y_{n-1}} - 1}{y_{n-1} - \gamma_{y_{n-1}}} + \beta_{y_{n-1}} - \beta_x \right] = 0 \\ c_1 f_X(x) - c_{n+1} f_{Y_n}(y_n) + c \left[\frac{\alpha_x - 1}{x - \gamma_x} - \frac{\alpha_{y_n} - 1}{y_n - \gamma_{y_n}} + \beta_{y_n} - \beta_x \right] = 0 \\ x + \sum_{i=1}^n y_i - z_p = 0 \end{cases} \quad (20)$$

非线性方程组式(20)即为基于 Copula 函数推求的最可能地区组成法应满足的计算通式。式(20)分别有 $(n+1)$ 个未知数 $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ 和 $(n+1)$ 个方程, 根据问题的实际意义, $f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ 的最大值客观上存在且唯一, 因此该方程组必定有唯一的解。显然, 其最大值不会在边界取得, 而是在定义域内部, 即 $0 < x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n < z_p$ 取得, 因此由偏导数为 0 求解方程组得到的驻点即为最大值点^[13]。

由于问题的复杂性, 采用数值方法计算非线性方程组式(20)的近似解。拟牛顿法是目前求解非线性方程组最为行之有效的一种算法, 具有收敛速度快、算法稳定性强等优点。本文将以各分区控制面积占设计断面的比例分配洪量 z_p 得到的结果作为初始解, 采用 Broyden 拟牛顿迭代法进行迭代求解, 得到水库 A_1 断面、区间流域 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ 洪水的最可能地区组成 $(x^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_{n-1}^*, y_n^*)$ 。

3 实例研究

清江流域地处湖北省西南部, 全长 423 km, 流域面积 17 000 km², 在宜都市陆城镇汇入长江, 如图 2 所示。干流从上到下依次建有水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库, 3 个水库的特征值分别见表 1。水布垭—隔河岩区间流域(简称水—隔区间)、隔河岩—高坝洲区间流域(简称隔—高区间)和高坝洲—宜都区间流域(简称高一宜区间), 面积分别为 3 570 km²、1 220 km² 和 1 350 km²。本实例将采用最可能地区组成法计算水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库的调洪作用对宜都断面设计洪水的影响, 并与《水利水电工程设计洪水计算规范(SL44—2006)》^[1](以下简称《规范》)推荐采用的同频率地区组成法进行比较。

表1 清江流域梯级水库特征值

Table 1 List of characteristic parameter values of the Qingjiang cascade reservoirs

水库名称	控制面积/km ²	总库容/亿 m ³	防洪库容/亿 m ³	防洪限制水位/m	正常蓄水位/m	设计洪水位/m
水布垭	10 860	45.80	5.00	391.80	400.00	402.25
隔河岩	14 430	37.70	5.00	192.20	200.00	203.14
高坝洲	15 650	4.85	-	-	80.00	80.00

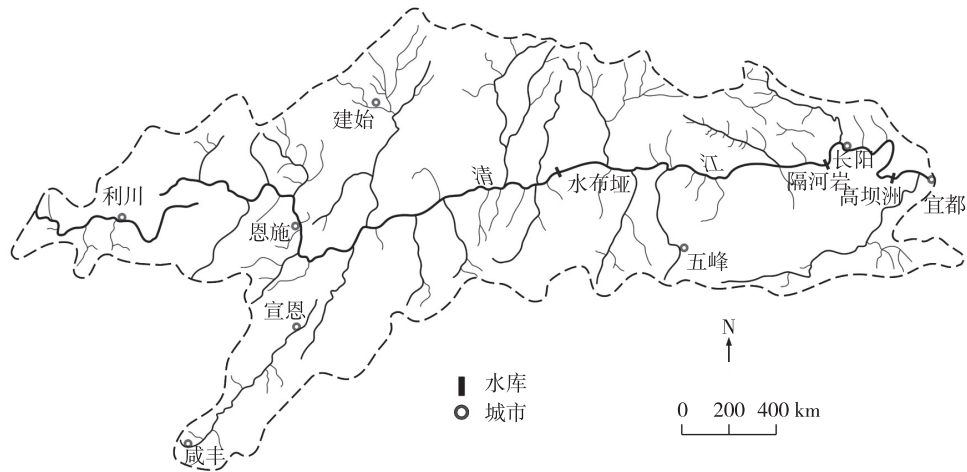


图2 清江梯级水库示意

Fig. 2 Sketch map of the Qingjiang cascade reservoirs

3.1 各分区洪水的边缘分布

根据清江流域的洪水特点和水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库对洪水的调节特性，选取3 d为设计洪水地区组成的控制时段。分析计算设计洪水的地区组成及梯级水库的调洪影响，需要各分区和宜都断面的天然洪量频率曲线及宜都断面的天然设计洪峰值。令 Q_{\max} 为天然年最大洪峰流量， W_{3d} 为天然情况的年最大3 d洪量。采用1965—2010(共46年)的天然洪水资料，得到宜都断面 Q_{\max} 、 W_{3d} 系列以及各分区的 W_{3d} 系列。依据《规范》规定的适线法估计各变量P-III型分布的参数，结果见表2。采用 χ^2 检验法对其进行假设检验，在5%的显著性水平下，自由度为 $k-r-1$ (r 为参数个数， k 为 χ^2 检验的分组数)的 χ^2 检验的接受域为小于等于临界值， $\chi_{0.05}$ 为临界值，8个随机变量的P-III型分布均通过了检验。

表2 各分区边缘分布参数估计结果

Table 2 Estimated parameters of marginal distributions in each region

变量	参数			χ^2 统计量	$\chi_{0.05}$
	α	β	γ		
水布垭断面 W_{3d}	2.30	0.43	2.65	0.74	3.84
水—隔区间 W_{3d}	0.91	0.44	1.03	1.26	3.84
隔河岩断面 W_{3d}	1.85	0.25	3.70	1.65	3.84
隔—高区间 W_{3d}	0.91	1.30	0.35	3.31	5.99
高坝洲断面 W_{3d}	1.85	0.23	4.03	2.03	3.84
高一宜区间 W_{3d}	0.91	1.17	0.39	4.25	5.99
宜都断面 W_{3d}	1.85	0.21	4.38	2.17	3.84
宜都断面 Q_{\max}	2.78	0.000 5	3 517	2.20	5.99

3.2 多维 Copula 函数的建立

研究表明，Archimedean Copula 函数族中的 Gumbel-Hougaard Copula 函数适用于各变量存在正相关的情

形, 比较适合用来构造河流上下游各站点洪水的联合分布^[8, 14]。分别采用四维对称和非对称 Gumbel-Hougaard Copula 函数^[15]建立水布垭断面 W_{3d} 、水一隔区间 W_{3d} 、隔一高区间 W_{3d} 和高一宜区间 W_{3d} 的联合分布, 利用极大似然法估计其参数, 结果见表 3。

表 3 Copula 函数参数的计算、检验和评价结果
Table 3 Calculation, testing and evaluation results for Copula function

Copula 函数	参数	检验及优选指标		
		D	E_{RMS}	C_{AI}
对称	4.14	0.161 3	0.058 8	-258.69
非对称	[1.89, 2.29, 4.74]	0.063 3	0.024 4	-335.61

为了检验所选取的 Copula 是否合适, 本文采用 K-S 检验法对 Copula 函数进行拟合检验, 利用均方根误差 E_{RMS} 准则与 C_{AI} 信息准则对 Copula 函数进行拟合优度评价, 选取 E_{RMS} 及 C_{AI} 较小的 Copula 函数作为最优的 Copula 函数^[16]。表 3 给出了四维对称和非对称 Gumbel-Hougaard Copula 函数的 K-S 检验统计量 D 、 E_{RMS} 和 C_{AI} 值。取 K-S 检验的显著性水平为 $\alpha = 0.05$, 与 $n = 46$ 对应的分位数为 0.200 5, D 值小于 0.200 5 时通过检验。

由表 3 可知, 对称和非对称 Copula 函数均能通过检验, 但非对称 Copula 函数的 E_{RMS} 和 C_{AI} 值均小于对称 Copula 函数。因此选择非对称 Gumbel-Hougaard Copula 函数作为联结函数构造各分区洪量的联合分布参与计算。图 3 给出了用优选的非对称 Copula 函数计算得出的理论联合分布与经验联合分布值, 其线性相关系数为 0.993, 经验频率与理论频率值的拟合情况很好。图 4 为另外一种形式对联合观测变量的经验联合分布值与理论联合分布值进行了对比, 为直观起见, 按理论频率的升序排列。图 3 和图 4 表明所建立的联合分布合理可行。

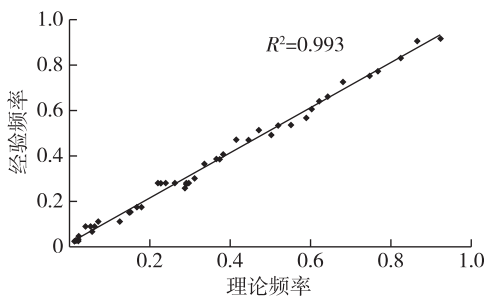


图 3 联合观测值的经验频率和理论频率相关关系

Fig. 3 Correlation between the empirical and theoretical frequency values

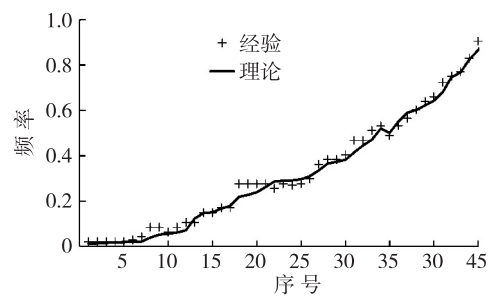


图 4 联合观测值的经验频率和理论频率比较

Fig. 4 Comparison of the empirical plots and theoretical frequency curve

3.3 受水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库影响的宜都断面设计洪水

在非线性方程组式(20)中, 令 $n = 3$, 即为 3 个水库的情形。可以求解出宜都断面设计洪水的最可能地区组成, 计算结果见表 4。采用《规范》推荐采用的同频率地区组成法, 则需要拟定 8 种不同的地区组成方案, 现选取对宜都断面防洪较为有利的组成方案 I (即高坝洲断面、隔河岩断面和水布垭断面与宜都断面同频率, 而高一宜区间、隔一高区间和水一隔区间则按水量平衡原则分别发生相应洪水) 和较为不利的组成方案 VIII (即高一宜区间与宜都断面同频率、隔一高区间与高坝洲断面同频率、水一隔区间与隔河岩断面同频率, 而高坝洲断面、隔河岩断面和水布垭断面则分别发生相应洪水), 对比分析和验证最可能地区组成法计算结果的合理性。这两种同频率地区组成方案 I 和方案 VIII 的计算结果列于表 4。可以看出, 这 3 种地区组成方案计算的各分区洪量分配结果有一定差别。最可能地区组成法得到的水一隔区间洪量较两种同频率地区组成方案要小, 而水布垭断面、隔一高区间和高一宜区间洪量则介于两种同频率地区组成方案之间。

表 4 宜都断面同频率和最可能设计洪水地区组成结果

亿 m³

Table 4 Results of equivalent frequency and most likely composition for Yidu site

设计频率/%	天然情况	同频率地区组成 I				同频率地区组成 VIII				最可能地区组成			
		水布垭断面	水一隔区间	隔一高区间	高一宜区间	水布垭断面	水一隔区间	隔一高区间	高一宜区间	水布垭断面	水一隔区间	隔一高区间	高一宜区间
0.1	46.58	25.33	14.01	3.55	3.69	21.28	14.11	5.14	6.05	22.30	13.64	4.93	5.71
0.2	42.97	23.51	12.79	3.27	3.40	20.01	12.83	4.66	5.47	20.87	12.45	4.47	5.18
0.5	38.16	21.07	11.17	2.90	3.02	18.31	11.13	4.02	4.70	18.93	10.88	3.88	4.47
1	34.47	19.19	9.93	2.62	2.73	16.96	9.85	3.54	4.12	17.44	9.67	3.42	3.94
2	30.73	17.27	8.69	2.34	2.43	15.58	8.55	3.06	3.54	15.90	8.46	2.97	3.40
5	25.68	14.67	7.03	1.95	2.03	13.64	6.84	2.42	2.78	13.80	6.82	2.36	2.70

得到宜都断面设计洪水的地区组成结果后,即可计算水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库调洪影响下的宜都断面设计洪峰流量。以水布垭断面、水一隔区间、隔一高区间和高一宜区间分配到的相应洪量为控制,按 1997 年典型洪水过程线同倍比放大得到各自的设计洪水过程线,输入到梯级水库系统进行调洪演算。水布垭—隔河岩区间考虑了河道洪水演算,由于隔河岩—高坝洲区间和高坝洲—宜都区间洪水传播时间较短,未进行河道演算。为了比较分析梯级水库的削峰作用,假定天然情况下宜都断面年最大洪峰流量与 3 d 洪量设计频率相同^[3-4]。不同设计频率的宜都断面天然洪峰流量及两种同频率地区组成方案和最可能地区组成推求的受上游梯级水库影响的洪峰流量见表 5。

表 5 梯级水库调蓄影响的宜都断面洪峰流量对比

m³/s

Table 5 Comparison of design peak discharges at Yidu site under the impact of cascade reservoirs

设计频率/%	天然情况	同频率地区组成 I			同频率地区组成 VIII			最可能地区组成		
		水库调蓄情况	削减量	削减率/%	水库调蓄情况	削减量	削减率/%	水库调蓄情况	削减量	削减率/%
0.1	25 700	16 300	9 400	36.6	19 100	6 600	25.7	18 700	7 000	27.2
0.2	24 000	15 900	8 100	33.8	18 300	5 700	23.8	18 000	6 000	25
0.5	21 700	13 200	8 500	39.2	14 600	7 100	32.7	14 400	7 300	33.6
1	19 900	12 800	7 100	35.7	14 000	5 900	29.6	13 900	6 000	30.2
2	18 000	12 500	5 500	30.6	13 400	4 600	25.6	13 300	4 700	26.1
5	15 500	11 800	3 700	23.9	12 200	3 300	21.3	12 200	3 300	21.3

由表 5 可知,水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库的联合调洪对下游宜都断面的削峰作用显著,对各频率的设计洪水削峰率均在 20% 以上。以宜都断面 100 年一遇洪峰流量为例,同频率地区组成法计算的流量区间为 [12 800 m³/s, 14 000 m³/s], 而最可能地区组成法的结果为 13 900 m³/s, 位于该流量区间之内。最可能地区组成法具有较强的统计基础,能较好反映流域洪水组成的自然规律,一定程度上避免了选取设计成果时的任意性。

4 结 论

(1) 同频率地区组成法隐含假设各区的洪水完全相关,其合理性要视各分区与设计断面洪水的相关性密切程度而定。需要拟定的地区组成方案数随水库数量的增加呈指数倍增长,计算工作量急剧增加,对于复杂梯级水库设计洪水的计算缺乏可操作性。

(2) 最可能地区组成法适用于各分区与设计断面洪水具有任意相关的情形,且组成方案是唯一的。利用 Copula 函数建立各分区洪水的联合分布,基于联合概率密度最大原则,推导得到了最可能地区组成法的

计算通式。

(3) 应用清江流域水布垭—隔河岩—高坝洲梯级水库实例进行验证,结果显示,最可能地区组成法的设计成果位于同频率地区组成法推求的流量区间之内,合理可行。清江梯级水库的联合调洪对下游宜都断面的削峰作用十分显著,100年一遇设计洪水的削峰率达到30.2%。

致谢: 感谢武汉大学“千人计划入选者”、挪威奥斯陆大学许崇育教授对英文摘要修改进行了指导和帮助。

参考文献:

- [1] 水利部. 水利水电工程设计洪水计算规范(SL44—2006) [S]. 北京:中国水利水电出版社,2006. (Ministry of Water Resources. Design flood calculation regulating for water resources and hydropower engineering (SL44—2006) [S]. Beijing:Hydropower and Electrical Press, 2006. (in Chinese))
- [2] 谢小平,黄灵芝,席秋义,等. 基于JC法的设计洪水地区组成研究[J]. 水力发电学报,2006,25(6):125-129. (XIE Xiaoping, HUANG Lingzhi, XI Qiuyi, et al. Study of flood region composition by JC method [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2006, 25(6): 125-129. (in Chinese))
- [3] 刘章君,郭生练,李天元,等. 基于Copula函数的梯级水库设计洪水地区组成研究[J]. 水资源研究,2014,3(2):124-135. (LIU Zhangjun, GUO Shenglian, LI Tianyuan, et al. Regional flood composition of cascade reservoirs based on Copula function [J]. Journal of Water resources Research, 2014, 3(2):124-135. ((in Chinese))
- [4] 水利部长江水利委员会水文局,水利部南京水文水资源研究所. 水利水电工程设计洪水计算手册[M]. 北京:中国水利水电出版社,2001. (Bureau of Hydrology, Changjiang Water Resources Commission, Nanjing Institute of Hydrology and Water Resources. Handbook of calculation design flood for water resources and hydropower projects [M]. Beijing:Hydropower and Electrical Press, 2001. (in Chinese))
- [5] 李天元,郭生练,李妍清,等. 梯级水库设计洪水方法及研究进展[J]. 水资源研究,2012,1(2):14-20. (LI Tianyuan, GUO Shenglian, LI Yanqing, et al. Review of design flood estimation methods for cascade reservoirs [J]. Journal of Water Resources Research, 2012, 1(2):14-20. (in Chinese))
- [6] LU B H, GU H H, XIE Z Y, et al. Stochastic simulation for determining the design flood of cascade reservoir systems [J]. Hydrology Research, 2012, 43(1/2): 54-63.
- [7] 谭维炎,黄守信. 水库下游城市防洪风险的估算[J]. 水利学报,1983,14(7):37-40. (TAN Weiyan, HUANG Shouxin. Flood risk estimation for city at reservoir downstream [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1983, 14(7):37-40. (in Chinese))
- [8] 郭生练,闫宝伟,肖义,等. Copula函数在多变量水文分析计算中的应用及研究进展[J]. 水文,2008,28(3):1-7. (GUO Shenglian, YAN Baowei, XIAO Yi, et al. Application of Copula function in multivariate hydrological analysis and estimation [J]. Journal of China Hydrology, 2008, 28(3): 1-7. (in Chinese))
- [9] 宋松柏,聂荣. 基于非对称阿基米德 Copula 的多变量水文干旱联合概率研究[J]. 水力发电学报,2011,30(4):20-29. (SONG Songbai, NIE Rong. Asymmetric Archimedean Copulas for multivariate hydrological drought frequency analysis [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2011, 30(4): 20-29. (in Chinese))
- [10] 陈璐,郭生练,周建中,等. 长江上游多站日流量随机模拟方法[J]. 水科学进展,2013,24(4):504-512. (CHEN Lu, GUO Shenglian, ZHOU Jianzhong, et al. Stochastic simulation of multi-site daily flow in the upper Yangtze River [J]. Advances in Water Science, 2013, 24(4): 504-512. (in Chinese))
- [11] 闫宝伟,郭生练,郭靖,等. 基于Copula函数的设计洪水地区组成研究[J]. 水力发电学报,2010,29(6):60-65. (YAN Baowei, GUO Shenglian, GUO Jing, et al. Regional design flood composition based on Copula function [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010, 29(6): 60-65. (in Chinese))
- [12] NELSEN R B. An introduction to Copulas (Second edition) [M]. New York: Springer, 2006.
- [13] 同济大学应用数学系. 高等数学(下册) [M]. 第六版. 北京:高等教育出版社,2007. (Department of Applied Mathematics of Tongji University. Advanced mathematics (sixth Edition, volume two) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese))
- [14] 方彬,郭生练,肖义,等. 年最大洪水两变量联合分布研究 [J]. 水科学进展,2008,19(4):505-511. (FANG Bin, GUO Shenglian, XIAO Yi, et al. Annual maximum flood occurrence dates and magnitudes frequency analysis based on bivariate joint dis-

- tribution [J]. *Advances in Water Science*, 2008, 19(4): 505-511. (in Chinese))
- [15] 陈璐, 郭生练, 张洪刚, 等. 长江上游干支流洪水遭遇分析[J]. *水科学进展*, 2011, 22(3): 323-330. (CHEN Lu, GUO Shenglian, ZHANG Honggang, et al. Flood coincidence probability analysis for the upstream Yangtze River and its tributaries [J]. *Advances in Water Science*, 2011, 22(3): 323-330. (in Chinese))
- [16] 冯平, 李新. 基于 Copula 函数的非一致性洪水峰量联合分析[J]. *水利学报*, 2013, 44(10): 1137-1147. (FENG Ping, LI Xin. Bivariate frequency analysis of non-stationary flood time series based on Copula methods [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013, 44(10): 1137-1147. (in Chinese))

General formula derivation of most likely regional composition method for design flood estimation of cascade reservoirs system *

LIU Zhangjun, GUO Shenglian, LI Tianyuan, XU Changjiang

(*State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Hubei Provincial Collaborative Innovation Center for Water Resource Security, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this study the joint probability distributions of floods at all sub-basins of cascade reservoirs were established using Copula function and based on the principle of maximizing joint probability density function the general formula of the most likely regional composition (MLRC) method was derived for design flood estimation of downstream reservoirs. The developed procedure was tested and compared with equivalent frequency regional composition (EFRC) method for determination of design flood of the Shuibuya-Geheyan-Gaobazhou cascade reservoirs system located at the Qingjiang River, a tributary of the Yangtze River in China. The results show that the design flood values of the MLRC method are within the range of peak discharges estimated by different EFRC schemes. The design flood reduction rates of the Yidu site are found to be evident due to the regulation of upstream cascade reservoirs, and the 100-year design flood reduction rate estimated by the MLRC method is 30.2%. The findings of the study reveal that the proposed method not only has strong statistical basis, but also has rational results with unique composition scheme, which will provide a new approach for design flood estimation of complex cascade reservoirs system.

Key words: design flood; cascade reservoirs; most likely regional composition method; general formula; Copula function; Qingjiang basin

* The study is financially supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 51190094;No. 51079100).