第 16 卷 第 6 期
2005 年 11 月
水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE
Vol. 16 ,No. 6
Nov. , 2005

土壤水分与溶质运移机制的分形理论研究进展

李云开[1] , 杨培岭[1] , 任树梅[1] , 罗远培[2]

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院, 北京 100083 ; 2. 中国农业科学院气象研究所, 北京 100081)

摘要: 土壤中水分和溶质运移一直是土壤-水环境系统中的研究热点, 也是目前仍未得到很好解决的问题。将分形理论应用于土壤水分溶质运移机制的研究, 探讨其领域中的众多复杂问题, 是一种全新的思路和方法。在对土壤结构定量化的分形表征进行简要阐述的基础上, 重点介绍了分形理论在水分特征曲线和水力传导度等土壤水分运动基本参数的分形模型、土壤水分运移过程模拟、土壤溶质运移的非费克现象、弥散度的尺度效应以及溶质运移机制研究方面所取得的一系列成果, 并就分形理论今后在土壤水分、溶质运移研究中的应用作了展望。

关 键 词: 土壤水分; 溶质运移; 运移机制; 分形理论

中图分类号: S152. 7 ; G353. 11 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-6791(2005)06-0892-08

"人口-粮食-资源-环境"已成为全球性问题之一, 土壤作为这些问题的中枢环节而倍受重视。现阶段, 土壤中水分和溶质运移已成为土壤学研究的热点之一。多年来, 许多专家一直致力于土壤中水分和溶质运移理论及模型的研究。20 世纪 70 年代 Mandelbort 分形理论问世以来, 已成为探索不规则结构和形态的强有力工具。分形理论及其研究方法引入到土壤物理学研究中, 使定量描述土壤结构特征的复杂性质成为可能, 在土壤水分和溶质运移机制与过程研究中提供了可靠的参数和理论支持, 已成为该领域研究中最有效的理论和方法之一[1~3]。本文对近年来利用分形理论与方法研究土壤水分与溶质运移机制的研究动态和发展趋势作一评述。

1 土壤结构的分形表征

国内外大量的研究结果表明[3~6]: 土壤结构具有统计意义上的自相似性, 反映土壤结构状况的一些参数(颗粒粒径、表面积、体积、空隙大小等)都表现出具有分形特征, 土壤结构的定量化表征就是确定土壤结构的分形维数。目前描述土壤结构的分形特征的数学模型主要有以下 3 种形式:

$$m(R) \propto R^{D_m} \qquad p(R) \propto R^{D_p} \qquad s(R) \propto R^{D_s} \tag{1}$$

式中 R 为研究物体的边长或半径; m、p、s 分别为质量、孔隙度、表面积; D_m、D_p、D_s 分别为质量、孔隙度与表面积的分形维数。

Rieu 和 Sposito[7]以 Menger 海绵($D_m = D_p = D_s$)为概念模型, 建立了土壤结构的质量分形模型, 提出了不完全碎裂的概念。Tyler 和 Wheatcraft[9]及杨培岭等[5]提出改进的粒径分布方法, 采用粒径重量分布来表征土壤结构的分形特征, 其形式为

$$\frac{R_i^{3-D}}{R_{\max}} = \frac{W_i}{W_0} \tag{2}$$

式中 R_i、$R_{\max}$分别为第 i 粒级和最大粒级土壤颗粒的平均直径; W_i、W_0 分别为 i 粒级土粒的重量和各粒级

收稿日期: 2004-08-03 ; **修订日期**: 2004-10-30
基金项目: 国家高技术研究发展计划 (863) 资助项目 (2001AA527015 ; 2002AA2Z4281)
作者简介: 李云开(1975 -) , 男, 湖南芷江人, 中国农业大学讲师, 主要从事节水灌溉理论与技术的研究。
E-mail : liyunkai @126. com

重量的总和；D 为颗粒大小分布的分形维数。

Arya 和 Paris[8]提出了描述土壤结构特征的经验物理公式，土壤空隙半径为

$$r_i = R_i[4en_i^{1-\alpha}/6]^{1/2} \tag{3}$$

式中　e 为土壤的孔隙比；n_i 为平均半径为 i 的土壤颗粒的数量；α 为经验常数。Tyler 和 Wheatcraft[9]研究表明 Arya-Paris 经验物理公式中的 α 即为孔隙分形维数 D_p，随着土壤结构的密实，D_p 逐渐增大。典型的土壤孔隙模型为 Menger 模型和 Sierpinski 模型，Rieu 和 Sposito[7]根据 Sierpinski 构造提出了孔隙分布的理论模型：

$$\phi_i = 1 - \left(\frac{d_m}{d_i}\right)^{3-D} \tag{4}$$

式中　ϕ_i、d_i 分别为第 i 级粒径的孔隙度和孔隙直径；d_m 为最大粒级的孔隙直径。对于完全分散的多孔介质，D 为孔隙分形维数，而对于有团聚结构、不完全分散的多孔介质，D 表现为体积分形维数 $D_t(D_t > D)$。此模型对于砂质、粉砂质粒径较大、团聚性差的土壤有很好的适应性。

Cohen 和 Knight[4]量测了 7 种土的表面面积和其尺寸分布，研究表明土壤颗粒表面具有很好的分形特征。Serra[3]对放大的粘土图片分析而获得土壤颗粒表面分维为 2.54～2.80，也有部分学者采用吸附法估算土壤颗粒表面的分维范围为 2.19～2.99[1]，土壤半径尺寸越小而分维值越大。Perfect[1]和 Giménez[10]也分别对 3 种类型土壤结构分形模型进行了较为系统的总结。

2　土壤水分运动的分形理论研究

2.1　土壤水分运动基本参数的分形模型

近 20 年发展的土壤水分运动基本参数的估算方法 ——土壤传递函数法(PTFs)一直倍受注目，迄今为止已经建立了一系列统计模型和经验、半经验模型，但这些研究是在欧氏几何空间中来描述的，由于土壤结构性状的极端复杂性，因此利用这些模型确定土壤水分运动参数无论在理论上还是在实用上都具有明显的不足。20 世纪 80 年代以来，国内外许多学者[2～4,10]在寻找土壤结构分形维数的基础上，根据土壤结构与水分运动基本参数之间的关系，确定土壤水分运动基本参数分形描述模型。与其他估算土壤水分运动基本参数方法相比，分形方法的主要优点在于它通过分形理论来描述土壤的孔隙结构特征，具有明确的物理意义。

(1) 土壤水分特征曲线　Tyler 和 Wheatcraft[9]将毛管孔隙通道模型应用于 van-Genuchter 经验模型中，第一个建议用分形方法估计土壤水分特征曲线：

$$\Psi_i = \frac{2\tau\cos\beta}{\rho_w g r_i} \tag{5}$$

$$r_i = R_i\left(\frac{2}{3}eN_i^{1-D}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

$$\theta_i = \theta_r + \frac{(\theta_s - \theta_r)}{[1 + (b\Psi_i)^n]^m} \tag{7}$$

式中　D 为孔隙分形维数；Ψ_i 为任一粒级毛管孔隙的压力水头；τ 为孔隙水的表面张力；β 为水的湿润角；ρ_w 为水的容重；g 为重力加速度；b、n、m 和 θ_r 为拟合参数；θ_i 为对应于 Ψ_i 的含水率；r_i 为毛管半径；R_i、N_i 相应于 i 粒级颗粒的半径和数量。其具体的推导过程与 Arya-Paris 模型类似，不同之处仅在于用表征土壤孔隙蜿蜒程度的分形维数来代替后者中的经验常数；对粗、中等质地的土壤来说，Tyler-Wheatcraft 分形模型预测的土壤水分特征曲线与实测值比较吻合；通过进一步研究又发现经验性的 Brooks-Corey 水分特征曲线模型中的指数参数与土壤孔隙的分形维数之间存在直接的线性关系。此后，Tyler 和 Wheatcraft[11]又从 Sierpinsnski 地毯分形结构出发，推导出了一个与 Campbell 模型相似的描述水分特征曲线的表达式：

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left(\frac{\Psi}{\Psi_a}\right)^{D-2} \tag{8}$$

式中 θ_s 为饱和含水率; Ψ 为基质势; Ψ_a 为临界进气压力; D 为土壤孔隙分形维数; $D-2$(推广到三维欧氏空间中为 $D-3$) 相当于 Campbell 定律中的 $-1/b$, Clapp 和 Hornberger[1]给出的 b 值范围为 4.05～1.91, 相应于式(8) 中的 D 值为 1.75～1.91。式(8) 将 Campbell 定律中的 b 值与土壤孔隙体积分形维数 D 联系起来, 初步揭示了 Campbell 定律的物理意义。

Rieu 和 Sposito[7]以 Menger 海绵为概念模型, 建立起结构性土壤的孔隙和团聚体大小分布的分形模型, 并根据容重、颗粒及团聚体大小的分析数据, 提出了土壤水分特征曲线的理论模型:

$$\Psi_i = \Psi_0[(1-\Phi)+\theta_i]^{\frac{1}{D_t-3}} \tag{9}$$

$$\theta_i = (r^{3-D_t})^i - (r^{3-D_t})^m \tag{10}$$

式中 θ_i、Ψ_i 分别为第 i 粒级的含水率、土水势; r 为土壤颗粒粒径线性相似比, 即 $d_{i+1}=rd_i$; $i=0, 1, 2, \cdots, m$, 表示由大到小的粒径分级, 下标 0、m 分别表示最大粒径和最小粒径; D_t 为孔隙体积分形维数, 该模型主要考虑了土壤的团聚作用, 理论性强, 但参数较多, 对大多数土壤来说, 要获得如此详细的资料是很困难的, 影响了模型的实用性。

Perfect 等[12]对 Rieu-Sposito 模型和 Tyler-Wheatcraft 模型进行了一定改进, 在进气压力 Ψ_a 和质量分维 D_m 之外, 引入第 3 个参数(排出最小孔隙中的水所需的最小压力), 推导的模型为

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \frac{\Psi^{D-3} - \Psi_d^{D-3}}{\Psi_a^{D-3} - \Psi_d^{D-3}} \tag{11}$$

该式成功地拟合了从粉细砂壤土到重粘土的各种不同原状土以及砂岩、沙、过筛土、玻璃微珠等的持水特性。总体而言, 拟合的结果优于式(8) 和式(9)、式(10) 的拟合结果, 但拟合得到的分维值 D 中较大一部分值大于 3, 大于 3 的 D 值是没有物理意义的。Perfect[14]利用该式对 6 种土壤的土壤水分特征曲线进行了拟合, 得到的分维值 D 介于 2.60(砂壤土)～2.90(粘土) 之间; 土壤颗粒越细, 分维值 D 越大, 土壤水分特征曲线曲率越小。同时指出只有对完整的土壤水分特征曲线(从干燥到饱和) 进行拟合, 才能得到较为精确的分维值, 否则, 就可能出现 $D>3$ 的不合理情况。

Pachepsky 等[1]应用分形概念, 对细质地土壤的水分特征曲线的空间变化进行了量化和模拟。Kravhenko 和 Zhang[14]对 Perrier 等[15]根据颗粒大小分布资料和分形理论提出的估计土壤水分特征曲线的 Brooks-Corey 模型和 Rieu-Sposito 模型进行了简化。刘建立等[16]利用 UNSODA 数据库中 554 个样本比较了 Tyler-Wheatcraft、Rieu-Sposito 和 Brooks-Corey 3 种分形模型的预测土壤水分特征曲线的适用性, 认为 Brooks-Corey 分形模型预测精度高于其它两种模型, Brooks-Corey 模型对于中、粗质地的土壤预测效果好于另外两种模型, Rieu-Sposito 分形模型则适用于细质地土壤, Tyler-Wheatcraft 模型的预测误差界于二者之间, 也适用于中、粗质地的土壤。王康等[17]综合考虑了土壤孔隙及土壤颗粒的不完全自相似性, 提出了基于不完全分形理论的土壤水分特征曲线模型。

(2) 土壤水力传导度 Toledo 等[18]根据分形几何理论和薄层水膜的物理特征, 得出含水率较低情况下的土壤非饱和水力传导度与含水率之间的关系可表示为

$$K(\theta) \propto \theta^{3/m(3-D_s)} \tag{12}$$

式中 $m\,(1<m<3)$ 为与土壤固体和表面液体相互作用的参数; D_s 为根据土壤水分特征曲线推求的分形维数。

Rieu 和 Sposito[7]根据土壤颗粒粒径分布提出了非饱和水力传导度模型为

$$K_i = C\beta_r \sum_{j=1}^{n} (d_f)_j^2 G^j \tag{13}$$

式中 C 为与土壤孔隙构成和流体性质有关的常数; $(d_f)_j$ 为分形结构的垂向孔隙面积; G^j 为衰减系数, 表示非饱和水力传导度随孔隙的减小而降低; β_r 为不发生碎裂分形的概率值在二维空间的对应值。该模型应用于砂土取得了较好的效果。

Crawford 等[4]认为 Rieu 和 Sposito 等[7]的预测模型假设过于简单, 未能体现土壤孔隙连通性对土壤水力性质

的影响，故引入分形谱维数 d_s 代表土壤孔隙的连通性来描述土壤非饱和水力传导度，与土壤含水率满足如下关系：

$$K(\theta) = \theta^{(R-1)[3+2(D_m/d_s)-D_m]/(D_m-3)} \tag{14}$$

式中　$R(R<1)$ 为一个反映土壤结构特征的函数；d_s 一般要通过数值方法才能确定；由于 R、d_s 的确定较为复杂，限制了式(14)的应用。

Fuentes 等[1]认为土壤水分特征曲线可以表示为 $\theta \propto \Psi^{D-3}$，据此推导出非饱和水力传导度与土壤含水率之间满足如下关系：

$$K(\theta) \propto \theta^{2/(3-D)+2D/3} \tag{15}$$

$$(1-\phi)^{D/3} + \phi^{2/3D} = 1 \tag{16}$$

式中　D 为土壤水分特征曲线中的分形维数；ϕ 为总孔隙度。

Shepard 等[1]在毛细管模型的基础上，利用 Koch 曲线模拟土壤中孔隙的通道的曲折程度，得到了土壤水力传导度的计算积分公式：

$$K(\theta) = (g/8\mu)\int_0^{\theta} r^2 T^{-2n} \mathrm{d}\theta \tag{17}$$

式中　μ 为水的粘滞系数；r 为毛管半径；T 为曲折度比(对于 Koch 曲线，$T=4/3$)。

Gimenez[10]等利用分析土壤切片数字化图像得到的孔隙体积分形维数 D_v 和孔隙空间表面积分形维数 D_s，根据 Kozeny-Carman 公式建立了基于分形维数的土壤饱和导水率公式：

$$K_{sat} \propto \phi_m^{2[(2-D_s)/(3-D_v)]+3+\alpha} \tag{18}$$

式中　α 是反映有效孔隙连通性质试验拟合参数。实验数据表明，式(18)可以对大多数土壤精确预测，但 α 值受测定的 D_v、D_s 影响，在原状土中 α 大多为正值，在混合土样中 α 大多为负值，D_v、D_s 一般要通过数字化图像测定。

刘建立等[19]根据土壤粒径分布曲线确定孔隙表面分形维数，将其作为分形水力传导率模型的参数来预测整个压力水头范围内的水力传导率，并利用 UNSODA 数据库中 217 个样本的实测资料对模型进行检验结果表明：Burdine 模型对砂土和砂壤土的预测效果优于 Mualem 模型，而对其它质地类型的土壤，Mualem 模型则略优于 Burdine 模型或效果相当。

王康等[20]等根据土壤的孔隙是具有连续分形性质的物理结构的特性，建立了基于连续分形理论的非饱和水力传导度模型：

$$K = \lambda K_s \left| 1 - \phi\frac{1-S}{1-a_c} \right|^{3/(3-D)} \tag{19}$$

$$S = \theta/\theta_s = (\Psi/\Psi_a)^{3-D} \tag{20}$$

式中　λ 为反映非饱和水力传导度与饱和水力传导度之间水力联系的系数；h_a 为土壤进气时的基质势；K_s 为饱和水力传导度；ϕ 为土壤孔隙率；其它符号同前。

李保国[21]、詹卫华等[4]和刘建国等[3]均综述了分形理论在预测土壤水力性质方面的应用及进展。

2.2　土壤水分运动过程的分形模拟

渗流模型是 Broadbent 提出模拟流体在无序连通介质中流动的模型，渗流的无规则性主要来自通道和非通道的随机分布。渗流模型是一种随机分形，它是研究分形介质中扩散过程的重要模型。渗流模型的一个显著特点就是粒子在其中运移过程中，扩散系数(D_p)与距离(x)呈幂函数关系：

$$D_p \propto x^{-\beta} \tag{21}$$

式中　β 表征模型中粒子扩散路径与自由扩散的偏离程度，运移路径越规整 β 值越大，当粒子扩散过程中出现加速时还可能是负数。

Chang 和 Yortsos 等[22]指出分形介质水力传导度(K)和扩散系数(D)呈幂函数关系：

$$K = Dx^{-\beta} \tag{22}$$

式中 扩散系数(D)通常为土壤含水率(θ)的函数,即

$$D = D(\theta) \tag{23}$$

将式(21)、式(22)代入多孔介质水分运动一维连续性方程可得非饱和分形多孔介质中的水分运动方程[22]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\beta}D(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{24}$$

$$D = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} = D(\theta)x^{-\beta}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} = G(\theta)x^{-\beta} \tag{25}$$

式中 $G(\theta)$为土壤水分扩散系数,$G(\theta) = D(\theta)(\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\theta)$。即式(23)可转化为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\beta}G(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) \tag{26}$$

当$\beta=0$时,式(26)就等于通常意义下的Richard方程。Pachepsky等[22]对模型进行了求解。

分形介质中的扩散过程可利用随机行走模型进行研究,Shaughnessy和Procaccia首次导出了分形介质扩散方程,Hentschel等[23]得出了分形介质扩散方程的精确解。Giona和Roman[23]在分数微积分理论的基础上,重新表述分形介质扩散方程,导出了分形介质中扩散方程的分数维分方程形式。但从目前所查阅的文献来看,还缺乏从分形多孔介质扩散理论出发推求具有明确物理意义的分形多孔介质水分运动方程。

3 土壤溶质运移机制的分形理论研究

3.1 土壤溶质迁移的非费克现象与弥散度的尺度效应

有关研究表明[24,25],多孔介质是包含多重的、嵌套和天然的空间与时间的尺度的介质,可将多孔介质划分为4种尺度:孔隙尺度、实验室尺度、田间尺度、区域含水层尺度,但无论在何种尺度上,介质都是非均质性的,在某一尺度上测量得到的性质可能不适用于其他任何尺度。大量的研究表明:用ADE模型或带有宏观弥散度的ADE模型来描述溶质迁移过程时,弥散度具有尺度效应,即弥散度随研究区域的尺度增大而增大的现象[24,25]。大量的土柱穿透曲线试验显示出弥散度随着土柱长度的增加而加大[2]。Wheatcraft和Tyler[27]利用分形理论解释了弥散度对于时间尺度的依赖性,弥散度与溶质平均运移距离呈幂函数关系。Pachepsky等[25]通过分析大量的研究结果,指出在实验室条件下,弥散度与土槽的深度存在一种幂定律关系,并拟合出指数值大约为0.3。刘建国等[24]通过归纳总结,得出弥散度与运移距离及多孔介质孔隙表面分形维数存在一定关系。弥散度对于时间和空间尺度的依赖性都称为尺度效应,Gelhar等[28]研究表明:溶质运移初期弥散度随着运移时间的增加而增加,但到一定临界平均距离后达到一稳定值。Fiori等[29]分别采用了两种分形模型来描述水力传导系数的空间变异结构,并由此得到两种分形特征的弥散度表达式,但他同时指出即使如此也难以消除弥散的尺度效应。事实上,在非均质多孔介质中溶质的运移过程是非费克(non-fick)的,基于费克扩散定理和随机布朗运动理论的ADE方程根本不足以描述此过程[30~32]。一种描述这种非费克扩散现象的方法是连续时间随机行走模型(Continuous Time Random Walks, CTRW),Benson等[30]对CTRW模型在水利学科中的应用作了综述,但CTRW模型最终还是在布朗运动的基础上构建的,在描述土壤溶质运移过程时还显得不足。因此,只有建立更为普适意义(弥散度具有时间和空间尺度)下的ADE模型才能精确的模拟土壤溶质运移,Benson等[30]2000年开始利用分数微分对流-弥散方程(Fractional Advection Dispersion Equation, FADE)来描述非均质含水层溶质运移过程。Pachepsky等[25]通过对土壤中不同深度的溶质运移穿透曲线的模拟分析得知,FADE方程的弥散度与距离无关,弥散尺度效应是由分数微分所反映。

3.2 土壤溶质运移的分数微分对流-弥散方程起源与应用

FADE模型的起源有3种形式,Zaslavsky等[33]提出基于马尔可夫随机过程的Fokker-Planck方程来表征随机行走过程,同时也提出了普适化的分数维Fokker-Planck(Fractional Fokker-Planck-Kolmogorov, FFPK)扩散方程[30]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}vP + \left(\frac{1}{2}+\beta\right)\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}DP + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\frac{\partial^{\alpha}}{\partial(-x)^{\alpha}}DP \tag{27}$$

在此基础上，Benson 等[30]提出了溶质运移的分数微分对流-弥散模型：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v\frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}+\beta\right)D\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial x^{\alpha}} + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\frac{\partial^{\alpha}}{\partial(-x)^{\alpha}} \tag{28}$$

式中　$\alpha(\alpha>0)$为分数阶微积分的维数，当时 $\alpha=2$，由于 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}(-x)^2$，则式(28)变为经典的一维对流-弥散方程；$\beta(0<\beta\leq 1/2)$表征溶质迁移方向的概率。式(27)中的分数微分定义为

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\right)\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{k-\alpha-1}C(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi \tag{29}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial(-x)^{\alpha}} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\alpha)}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\right)\int_{x}^{+\infty}(x-\xi)^{k-\alpha-1}C(\xi.t)\,\mathrm{d}\xi \tag{30}$$

式中　k为大于α的最小整数。在阶跃输入的情况下，对式(28)傅立叶变换得到

$$\hat{C}(k,t) = \exp\left[\frac{1}{2}(1-\beta)(-ik)^{\alpha}Dt + \frac{1}{2}(1+\beta)(ik)^{\alpha}Dt - ikvt\right] \tag{31}$$

Benson 等[31,33]提出了式(31)基于α稳态分布(Levy 分布)的近似解析解

$$C = \frac{C_0}{2}\left[1-\mathrm{ser}f_{\alpha}\left(\frac{x-vt}{(Bt)^{\alpha}}\right)\right] \tag{32}$$

式中　$B=|\cos(\pi/2)|D$；$\mathrm{ser}f_{\alpha}$称为稳定误差函数，等于对称α稳定概率密度函数由 0 到参数 z 的积分的 2 倍：

$$\mathrm{ser}f_{\alpha}(z) = 2\int_0^z f_{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

式中　$f_{\alpha}(x)$为标准对称的α稳定概率密度，即

$$f_{\alpha}(x) = \frac{x^{1/(\alpha-1)}}{2|1-\alpha|}\int_0^1 U_{\alpha}(\phi)\exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)}U_{\alpha}(\phi)]\mathrm{d}\phi,\ (1<\alpha<2) \tag{34}$$

$$U_{\alpha}(\phi) = \left[\frac{\sin(\pi\alpha\phi/2)}{\cos(\pi\alpha/2)}\right]^{\alpha/(\alpha-1)} \tag{35}$$

误差函数 $\mathrm{erf}(z)$与 $\mathrm{ser}f_{2.0}$之间的关系为

$$\mathrm{erf}(z) = \mathrm{ser}f_{2.0}(2z) \tag{36}$$

Chaves[33]建议利用多孔介质扩散方程的分数微分形式来描述$\hat{\mathrm{L}}$ery 飞行是另外一种方法，推导出的 FADE 模型形式与 Benson 等推导的模型非常相似。Schumer 等[34]提出了一种基于普适化的泰勒级数的弥散通量表达形式，从而得出分数阶 Fick 定律(通量与分数微分阶数成比例)，并利用分数阶 Fick 定律代替欧拉法估算多孔介质溶质运移时的 Fick 定律，从而获得分数微分 FADE。

FADE 模型提出的时间较晚，相对于传统的 ADE 模型来说应用研究较少。Benson 等[2,32]在提出 FADE 模型的同时进行了室内 1m 沙盒和室外区域含水层的示踪试验，研究结果表明：沙盒 $\alpha=1.5$，而含水层 $\alpha=1.65$～1.8。Pachepsky 等[25]利用 FADE 模型进行土壤溶质运移的尺度效应研究，结果表明应用 FADE 模型可以模拟非均质土壤中的溶质运移过程，确定一维空间溶质穿透曲线的 FADE 模型的解析解，为不同的溶质运移长度率定α值，对于非饱和土壤溶质运移 $\alpha=1.574$～1.683，饱和土壤溶质运移 $\alpha=1.846$～1.913，同时指出 FADE 模型在模拟溶质穿透曲线是明显优于传统的 ADE 模型。

4　土壤水分溶质运移过程分形理论研究的发展方向

分形理论在土壤结构的表征、水分溶质运移参数和模拟模型方面都取得了突破性的进展，也充分发挥了分形理论刻画非线性、复杂系统的能力，根据国内外有关分形理论在土壤水分溶质迁移中的研究动向，可以预计

今后该领域研究的发展趋向可能在以下几个方面:

(1) 进一步完善对土壤水分运动参数的分形描述,进而推导基于分形理论的土壤水分运动方程。目前对于土壤水分运动参数的分形描述主要集中在土壤水分特征曲线和水力传导度方面,对于其他参数如容水度、弥散度的分形描述;如何利用分数阶微积分理论和分形多孔介质随机扩散理论推导具有明确物理意义的土壤水分运动方程都还需要进一步研究;

(2) 土壤结构的形成与破坏过程的分形模拟。虽然国内外学者利用分形理论进行土壤结构定量化描述方面进行了大量的工作,但人们更为关心土壤结构动态的演化过程,例如盐碱地土壤结构的变化。如何把分形理论中的裂隙模型、凝聚模型等应用到土壤结构中,进行土壤结构演变过程的动态模拟将是一个新的研究方向;

(3) 建立土壤结构分形与植物根系形态分形之间的关系。国内许多学者研究认为可以用分形理论来研究植物根系统的复杂形态特征,并建立根系分形度量的应用模型。如何建立土壤结构分形维数与根系形态分形维数之间的定量关系以及如何在根系吸水模型中引进根系分形维数,还未见相关的报道;

(4) FADE 模型无疑是属 ADE 模型方法,但还须深入、系统的研究。如何表征 FADE 模型中分数阶与土壤非均质结构之间的定量关系,FADE 模型的求解方法,土壤水分溶质运移参数的分形模型在 FADE 模型中应用,以及 FADE 模型在污染物、养分等化学物质在土壤运移过程模拟中的应用等等都会是以后研究的热点。

参考文献:

[1] Perfect E, Kay B D. Applications of fractals in soil and tillage research:a review[J]. Soil&Tillage Research, 1995,36:1 - 20.

[2] Benson D A. The fractional advection-dispersion equation:Developmentand application[D]. Univ of Nev, Reno,Nevada. 1998.

[3] 刘建国,聂永丰. 非饱和土壤水力参数预测的分形模型[J]. 水科学进展, 2001,12(1):99 - 105.

[4] 詹卫华,黄冠华. 土壤水力特性分形特征的研究进展[J]. 水科学进展, 2000, 11(4):457 - 462.

[5] 杨培岭,罗远培,石元春. 用粒径的重量分布表征的土壤分形特征[J]. 科学通报, 1993, 38(20):1896 - 1899.

[6] Bartoli F R, Philippy M, Doirsse S N. Structure and self-similarity in silt and sandy soils:The fractal approach[J]. J Soil Sci, 1991, 42:167 - 185.

[7] Rieu M, Sposito G. Fractal Fragmentation, Soil Porosity, and Soil Water Properties[J]. Soil Sci Soc Am J,1991(55):1231 - 1238.

[8] Arya L M, Paris J F. A physic empirical Model to Predict the Soil Moisture Characteristic from Particle-Size Distribution and Bulk Density Data [J]. Soil Sci Soc Am J,1981, 45:1023 - 1030.

[9] Tyler S W, Wheatcraft S W. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation[J]. Soil Sci Soc Am J, 1989(53):987 - 996.

[10] Gimenez D,Perfect E, Rawls W J. Fractal models for predicting soil hydraulic properties:a review[J]. Engineering Geology, 1997,48:161 - 183.

[11] Tyler S W, Wheatcraft S W. Fractal process in soil water retention[J]. Water Resoure Research, 1990, 26:1047 - 1054.

[12] Perfect E, *et al*. An improved fractal equation for the soil water retention curve[J]. Water resource Research, 1996,32:281 - 287.

[13] Perfect E. Estimating soil mass fractal dimensions from water retention curves [J]. Geoderma, 1999, 88:221 - 231.

[14] Kravchenko A, Zhang R. Estimating the soil water retention from particle-size distribution:a fractal approach[J]. Soil Science, 1998, 163(3):171 - 179.

[15] Perrier E, *et al*. Models of the water retention curve for soils with a fractal pore size distribution[J]. Water Resoure Research, 1996,32:3025 - 3031.

[16] 刘建立,徐绍辉. 根据颗粒大小分布估计土壤水分特征曲线:分形模型的应用[J]. 土壤学报, 2003, 40(12):46 - 52.

[17] 王 康,张仁铎,王富庆. 基于不完全分形理论的土壤水分特征曲线模型[J]. 水利学报, 2004(5):1 - 7.

[18] Toledo Pedro G, Novy Robert A, Davis H Ted, *et al*. Hydraulic conductivity of porous media at low water content[J]. Soil Sci Soc Am J, 1990, 54:673 - 679.

[19] 刘建立,徐绍辉,刘 慧,等. 确定田间土壤水力传导率的分形方法[J]. 水科学进展, 2003, 14(4):464 - 470.

[20] 王 康,张仁铎,王富庆. 基于连续分形理论的土壤非饱和水力传导度的研究[J]. 水科学进展, 2004, 15(2):206 - 300.

[21] 李保国. 分形理论在土壤科学中的应用及其展望[J]. 土壤学进展, 1994, 22:1 - 10.

[22] Pachepsky Y, Dennis Timlin. Water transport in soils as in fractal media[J]. Journal of Hydrology, 1998, 204:98 - 107.

[23] 辛厚文. 分形介质反应动力学[M]. 上海:上海科技教育出版社, 1997.

[24] 刘建国. 多孔介质水分运动与污染物迁移的分形几何研究[D]. 北京:清华大学, 2001.

[25] Pachepsky Y, Benson D A, Rawls W. Simulating scale-dependent solute transport in soils with the fractional adevective-dispersive equation [J]. Soil Sci Soc Am J, 2000, 64:1234 - 1243.

[26] Zhang R, Huang K, Xiang J. Solute movement through homogeneous and heterogeneous soil columns[J]. Adv Water Resoure, 1994, (17):317 - 324.

[27] Wheatcraft S W, Tyler S W. An explanation of scale-dependent dispersivity in heterogeneous aquifers using concepts of fractal geometry[J]. Water Resoure Research, 1988, 24(4):566 - 578.

[28] Gelhar L W. Stochastic Subsurface Hydrology[M]. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1993.

[29] Fiori A. On the influence of local dispersion in solute transport through formation with evolving scales of heterogeneity[J]. Water Resource Research, 2001, 37(2):235 - 242.

[30] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M. The fractional-order governing equation of Levy motion[J]. Water Resource Research, 2000, 36(6):1413 - 1423.

[31] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M. Application of a fractional advection dispersion equation[J]. Water Resource Research, 2000, 36(6):1403 - 1412.

[32] Zaslavsky G M. Renormalization group theory of anomalous transport in systems with Hamiltonian chaos[J]. Chaos, 1994, 4(1):25 - 33.

[33] Chaves A S. A fractional diffusion equation to describe Lévy flights[J]. Physics Letters A, 1998, 239:13 - 16.

[34] Schumer R, David A Benson, Mark M Meerschaert, *et al*. Eulerian derivation of the fractional advection-dispersion equation[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 2001, 48:69 - 88.

Development in research on the fractal theory of soil water and solute transport mechanisms*

LI Yun-kai[1], YANG Pei-ling[1], REN Shu-mei[1], LUO Yuan-pei[2]

(1. *College of Hydraulic and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing* 100083, *China*;

2. *China Academy of Agricultural Science, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: The Soil water and the solute transport are a hotspot in the research of the soil-water environment, and it is the problem that has no better solutions. It is a new ideal and method that the soil water and the solute are studied with the fractal theory to settle the complex problems in this area. Based on the expounding in briefly that soil structure is measured with fractal theory, a series of results in the soil water and the solute transport mechanisms with the fractal theory are reviewed particularly, including its basic parameters the non-Fick phenomenon of the soil solute transport and the scale effect of dispersion coefficient. It is hoped that the Fractal theory will be used in the future to research the soil water and the solute transport process.

Key words: soil water; solute; transport mechanism; fractal

* The study is financially supported by the National High Technology Research and Development Program of China (2001AA527015; 2002AA2Z4281).