第 17 卷 第 1 期
2006 年 1 月

水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE

Vol. 17, No. 1
Jan., 2006

随机扩散水质模型研究

彭 勤 文

(杭州电子科技大学理学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 考虑湖泊中影响总磷沉积过程的众多生态因子的变化过程, 假定湖泊中总磷沉积过程由标准布朗运动驱动, 建立了一个总磷浓度的随机扩散方程, 推广确定性富营养化 Vollenweider 水质模型为随机扩散模型, 获得了总磷浓度过程的解析解, 进而求出了总磷浓度过程的均值和方差, 指出了一种依据沉积系数调控湖泊中总磷浓度的方法。模型被应用于巢湖总磷浓度过程的模拟。

关 键 词: 总磷浓度; 沉积; 随机扩散方程; 水量调控

中图分类号: X143 文献标识码: A 文章编号: 1001-6791(2006)01-0113-03

湖泊水质富营养化是社会最为关注的环境问题之一。控制湖泊污染的手段之一是水量调控技术, 其目的是通过对入湖水量、出湖水量及湖泊蓄水量的合理调控, 以减轻湖泊的污染程度。水量调控技术主要由污水截排技术、调新水技术和控制下泄水量三个方面组成。上述工程技术措施的制定, 首先要全面掌握湖泊水环境质量及其演变趋势, 特别是对总磷过程的研究, 对湖泊水质富营养化的治理具有重要的指导意义[1]。

Vollenweider 水质模型利用确定性微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{Q_i p_i}{v}-\sigma p-\frac{Q_0 p}{v} \tag{1}$$

式中 $p=p(t)$ 为湖泊的总磷浓度; v 为湖泊的容积; σ 为湖泊中磷的沉积系数; Q_i 为湖泊的入流流量; p_i 为湖泊入流的总磷浓度; Q_0 为湖泊出流流量。

式(1)假定湖泊中总磷的沉积系数是一个常数, 未考虑湖泊中影响总磷沉积的众多生态因子受季节、光照等的随机变化过程, 模型结果表明总磷浓度随时间演变的过程为 $p(t)=\frac{\beta}{\alpha}+e^{-\alpha(t-t_0)}\left[p(t_0)-\frac{\beta}{\alpha}\right]$, 这里 $p(t_0)$ 是初始时刻的总磷浓度, $\alpha=\sigma+\frac{Q_0}{v}>0$, $\beta=\frac{Q_i p_i}{v}>0$ 均为正常数。易见 $\lim_{t\to+\infty}p(t)=\frac{\beta}{\alpha}$。

文献[2]对式(1)引入随机扰动, 建立了随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{Q_i p_i}{v}-\sigma p-\frac{Q_0 p}{v}+w(t) \tag{2}$$

式中 $W(t)$ 是高斯白噪声过程。获得的总磷浓度随机过程的期望和方差分别为

$$E[p(t)]=\frac{\beta}{\alpha}+e^{-\alpha(t-t_0)}\left\{E[p(t_0)]-\frac{\beta}{\alpha}\right\} \text{和} D[p(t)]=e^{-2\alpha(t-t_0)}D[p(t_0)]-\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}$$

容易看出: $\lim_{t\to+\infty}E[p(t)]=\frac{\beta}{\alpha}$ 和 $\lim_{t\to+\infty}D[p(t)]=\frac{1}{2\alpha}$。这表明总磷浓度过程的期望和方差都将稳定于常值 $\frac{\beta}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{2\alpha}$, 因而对确定性 Vollenweider 水质模型的高斯白噪声扰动不影响总磷浓度的长期趋势。对于调节总磷浓度, 上述模型都缺少有理论支持的可操作性。要实现总磷浓度的控制, 必须关注湖泊中总磷的沉积过程的随机变化。以下分步讨论本文所建立的模型。

收稿日期: 2004-10-21; 修订日期: 2005-03-10

作者简介: 彭勤文(1964-), 男, 甘肃甘谷人, 杭州电子科技大学副教授, 硕士, 主要从事应用随机过程研究。
E-mail: pqw101@yahoo.com

1 模型建立

考虑湖泊中总磷沉积过程的随机干扰由标准布朗运动驱动, 因而总磷沉积过程的随机干扰由 $\sigma + B(t)$ 来描述。其合理性在于尽管众多生态因子受季节、光照等的随机变化的影响, 但是各因子的作用平均均较小, 因而其总体效果是正态的。记 $B(t)$ 为标准布朗运动, 在时间区间 $(t, t+dt]$ 湖泊总磷浓度的变化过程遵循如下的随机微分方程:

$$\mathrm{d}p(t) = [\beta - \alpha p(t)]\mathrm{d}t - p(t)\mathrm{d}B(t) \tag{3}$$

记 $p(0) = p_0$ 为初始总磷浓度, 假定为常数。式中各符号的意义同上。

2 模型求解

利用伊藤微分公式[3]及类似于常微分方程的积分因子方法, 最后得到式(3)的解的表示为

$$p(t) = \mathrm{e}^{\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)t - B(t)}\left[p_0 + \beta\int_0^t \mathrm{e}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)S + B(s)}\mathrm{d}s\right] \tag{4}$$

3 求解 $E[p(t)]$ 和 $D[p(t)]$

注意到 $t > s > 0$, $B(t) \sim N(0, t)$ 和 $B(t) - B(s) \sim N(0, (t-s))$, 则利用随机变量的矩母函数可得[4]:

$$\begin{aligned} E[p(t)] &= p_0\mathrm{e}^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)t}E[\mathrm{e}^{-B(t)}] + \beta\int_0^t E\left[\mathrm{e}^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(t-s) - [B(t)-B(s)]}\right]\mathrm{d}s \\ &= p_0\mathrm{e}^{-\alpha t} + \beta\int_0^t \mathrm{e}^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(t-s)}\mathrm{e}^{\frac{(t-s)}{2}}\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

易见式(5)与文献[2]的结论相同并且有 $\lim\limits_{t\to+\infty} E[p(t)] = \dfrac{\beta}{\alpha} = \sigma\dfrac{Q_i p_i}{v + Q_0}$。

由于式(4)中出现的几何布朗运动不具有独立增量性, 为了得到方差, 需要采用以下的步骤。利用伊藤微分公式给出: $\mathrm{d}p^2(t) = [2p(t)(\beta - \alpha p(t) + p^2(t)]\mathrm{d}t - 2p^2(t)\mathrm{d}B(t)$, 两边取期望得如下的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} = 2\beta E[p(t)] + (1-2\alpha)M(t) = 2\beta\left\{\frac{\beta}{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right]\right\} + (1-2\alpha)M(t) \tag{6}$$

式中 $M(t) = E[p^2(t)]$, 初始条件为 $M(0) = E[p^2(0)] = p_0^2$。分 3 种情形求解式(6)。

(1) 当 $1-2\alpha \neq 0$ 且 $\alpha \neq 1$ 时, 式(6)的解为

$$M(t) = \frac{2\beta^2}{\alpha(2\alpha-1)} + \left[p_0^2 - \frac{2\beta^2}{\alpha(2\alpha-1)} - \frac{2\beta\left(p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha-1}\right]\mathrm{e}^{(1-2\alpha)t} + \frac{2\beta\left(p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

相应地:

$$D[p(t)] = \frac{\beta^2}{\alpha^2(2\alpha-1)} + \left[p_0^2 - \frac{2\beta^2}{\alpha(2\alpha-1)} - \frac{2\beta\left(p_0-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha-1}\right]\mathrm{e}^{(1-2\alpha)t} + \left[\frac{2\beta\left(p_0-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha-1} - \frac{2\beta}{\alpha}\right]\mathrm{e}^{-\alpha t} - \left(p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2\mathrm{e}^{-2\alpha t} \tag{7}$$

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 式(6)的解为

$$M(t) = 2\beta^2 + 2\beta(p_0 - \beta)t\mathrm{e}^{-t} + (p_0^2 - 2\beta^2)\mathrm{e}^{-t}$$

相应地:

$$D[p(t)] = \beta^2 + 2\beta(p_0 - \beta)t\mathrm{e}^{-t} + p_0(p_0 - 2\beta)\mathrm{e}^{-t} - (p_0 - \beta)^2\mathrm{e}^{-2t} \tag{8}$$

(3) 当 $1-2\alpha = 0$ 时, 式(6)的解为

$$M(t) = p_0^2 + 4\beta(p_0 - 2\beta) + 4\beta^2 t - 4\beta(p_0 - 2\beta)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

相应地:

$$D[p(t)] = p_0^2 + 4\beta(p_0 - 3\beta) + 4\beta^2 t - 8\beta(p_0 - 2\beta)e^{-\frac{t}{2}} - (p_0 - 2\beta)^2 e^{-t} \tag{9}$$

讨论：由式(7)知，当$\frac{1}{2} < \alpha$时，$\lim_{t\to+\infty} = \frac{\beta^2}{\alpha^2(2\alpha - 1)} \geqslant 0$，其它情形$0 < \alpha < \frac{1}{2}$使得$D(p(t)] \to \infty, (t \to \infty)$；由式(8)知$\alpha = 1$有$\lim_{t\to+\infty} D[p(t)] = \beta^2$；由式(9)知$\alpha = \frac{1}{2}$时，有$D[p(t)] \to +\infty, (t \to +\infty)$。

4　结果解释

总磷浓度过程的均值$E[p(t)] = e^{-\alpha}\left(p_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}$当时间足够长时将稳定于值$\frac{\beta}{\alpha}$。这表明总磷浓度均值的变化与磷的沉积过程受扰动无关，主要由入流量、出流量、沉积系数所决定。但是，对沉积过程的扰动强烈地影响总磷浓度过程的方差，控制出流量Q_0使得满足$Q_0 > \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)v$，即$\sigma + \frac{Q_0}{v} = \alpha > \frac{1}{2}$可以保证总磷过程的方差有限，其它情形可使方差很大。这样若沉积系数$\sigma > 0.5$，湖泊生态系统本身即可保持总磷浓度的稳定。这时调控总磷浓度的方式可主要采取污水截排技术；若沉积系数$\sigma < 0.5$，控制下泄水量技术是$Q_0 > \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)v$。

5　模型应用

利用文献[5]关于巢湖在 1987 年 5 月到 1988 年 10 月期间的水质检测资料，取初始总磷浓度$p_0 = 0.163$ mg/L，总磷沉积系数$\sigma = 0.0432\ d^{-1}$，库容积 21.17 亿 m^3，年出流量 74.29 亿 m^3，年入流量 73.56 亿 m^3。按照本文结果式(5)、式(7)和式(8)获得表 1。

由表 1 可以看出，模型均值与实测值基本相符，而且方差普遍很小。但是模型均值基本上稳定在 0.1363 mg/L，未能反映出实测值的季节性变化，但反映在模型方差上。这是模型中流量、沉积系数等均为常数的结果。进一步研究方向是将模型中参数设定为时间的函数。

表 1　模型的计算结果

Table 1　Computed results

时　间	TP 实测值 /(mg·L^{-1})	模型均值 /(mg·L^{-1})	模型方差 /(mg^2·L^{-2})
1987-05	0.13	0.1421	0.0010
1987-08	0.13	0.1366	0.0010
1987-11	0.17	0.1351	0.0017
1988-02	0.13	0.1347	0.0010
1988-05	0.11	0.1346	0.0007
1988-10	0.10	0.1346	0.0006
平　均	0.1283	0.1363	0.0010

参考文献：

[1] 金相灿．湖泊富营养化控制和管理技术[M]．北京：化学工业出版社，2001. 202－208.
[2] 饶　群，芮孝芳．完全混合系统总磷随机模型研究[J]．水科学进展，2002，13(1)：22－25.
[3] 龚光鲁，钱敏平．应用随机过程教程[M]．北京：清华大学出版社，2004. 323－346.
[4] 刘嘉　．应用随机过程[M]．北京：科学出版社，2003. 15－22.
[5] 屠清瑛，顾丁锡，尹澄清，等．巢湖富营养化研究[M]．合肥：中国科学技术大学出版社，1990.

Research on stochastic diffusion water quality model

PENG Qin-wen

(*Faculty of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

Abstract: Considering the change of various ecological factors in lake, which effected on the whole phosphorus sediment process, a stochastic diffusion model for the total Phosphorus concentration in lake is estabilished, where a standard Brownian motion perturbs the whole phosphorus sediment process. We extend the Vollenweider water quality model and obtain its analytical solution, mean, and variance. According to the sediment coefficient, a method that controls the total phosphorus concentration is pointed out. The model is applied to the Chao Lake in Anhui province.

Key words: total phosphorus concentration; Sediment; stochastic diffusion equation; flow control