

三角形网格下求解二维浅水方程的和谐 Godunov 格式

潘存鸿

(浙江省水利河口研究院, 浙江 杭州 310020)

摘要: 为保证计算格式的和谐性, 通过特殊的底坡源项处理技术, 在三角形网格上建立了求解二维浅水流动方程的具有空间二阶精度的 Godunov 格式。应用准确 Riemann 解求解法向数值通量, 用改正的干底 Riemann 解处理动边界问题。经典型算例和钱塘江河口涌潮计算验证, 表明模型健全, 分辨率高, 具有较大的推广应用价值。

关键词: 二维浅水方程; 三角形网格; Godunov 格式; 底坡源项; Riemann 解

中图分类号: TV131.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2007)02-0204-06

天然河流、海岸、湖泊等水域一般几何形状复杂, 应用有结构网格的数值模型往往受到很大限制, 尤其当网格较疏时, 精度常常不能保证。在浅水流动数值模型中, 三角形网格最早应用于有限元方法和有限差分方法。近十年来, 有限体积法因其物理意义明确, 计算守恒性好等优点, 其与无结构网格、特别是三角形网格相结合, 越来越受到计算工作者的欢迎^[1~3]。

浅水方程不同于欧拉方程, 由于存在底坡源项, 空气动力学中许多成熟的计算格式不能直接应用于求解非平底浅水流动方程, 否则会产生计算结果的不和谐。即在静水条件下, 流速不为零, 且水位不再为常数^[4]。20 世纪 90 年代以来, 国际上许多学者致力于这一问题的研究^[1,4~14], 并解决了四边形网格上的和谐问题^[10,12,14]。最近, E. Audusse 等^[15]建立了以三角形节点为控制体中心的“和谐”格式。

本文在文献[14]基础上, 应用特殊的底坡源项处理技术, 并采用三角形网格中心格式, 建立了无结构三角形网格上具有空间二阶精度的求解二维浅水方程的和谐的 Godunov 格式。

1 控制方程及其求解方法简介

非恒定二维浅水流动方程守恒形式为

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

$$\text{式中 } E = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \left\{ \frac{\partial b}{\partial x} + S_{fx} \right\} \\ -gh \left\{ \frac{\partial b}{\partial y} + S_{fy} \right\} \end{bmatrix}$$

式中 u 、 v 分别为 x 、 y 方向的流速分量; h 为水深; g 为重力加速度; b 为河床高程; S_{fx} 、 S_{fy} 分别为 x 、 y 方向的阻力项。

计算域采用任意三角形剖分, 并采用网格中心格式, 即将物理量定义在三角形形心, 控制体即为单元本

收稿日期: 2005-09-12; 修订日期: 2005-12-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40106010); 浙江省自然科学基金资助项目 (M403054)

作者简介: 潘存鸿 (1963 -), 男, 浙江宁波人, 教授级高级工程师, 硕士, 主要从事河口海岸规划及研究。

E-mail: panch@zhe.org

身。设 Ω_i 为第 i 个三角形单元， Γ_i 为其边界，对式(1)应用有限体积法离散，并利用格林公式，则有

$$A_i \frac{\partial E}{\partial t} + \int_{\Gamma_i} (F \cos \theta + G \sin \theta) dl = \iint_{\Omega_i} dx dy \quad (2)$$

式中 A_i 为三角形单元 Ω_i 的面积； $(\cos \theta, \sin \theta)$ 为 Γ_i 外法向单位向量； dl 为线积分微元。对式(2)时间导数采用前差，并记 $F_n = F \cos \theta + G \sin \theta$ ，即得基本数值解公式为

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 F_{nj} l_j + \frac{\Delta t}{A_i} \iint_{\Omega_i} S_0 dx dy + \Delta t S_{fi} \quad (3)$$

式中 Δt 为时间步长；下标 j 表示 i 单元第 j 边； l_j 为三角形第 j 边边长；上标 n 为时间步； S_{0i} 为底坡源项； S_{fi} 为阻力项。

求解式(3)的核心是法向数值通量的计算。因其求解方法不同，发展了许多计算方法，如 Godunov 型格式、TVD 格式、KFVS 格式、BGK 格式、MacCormack 格式、ENO 和 WENO 格式等。本文应用准确 Riemann 解计算法向数值通量^[14]。

设单元 i 与 j 的共边(界面)为 Γ_{ij} ，引进局部坐标 ξ ，其与 Γ_{ij} 垂直，且从 i 单元指向 j 单元。略去源项后式(1)对应的 Riemann 问题的提法为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 & t > 0 \\ U(0, \xi) = \begin{cases} U_l, & \xi < 0 \\ U_r, & \xi > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

式中 $U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}$ ； $W = \begin{bmatrix} h \\ h^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ h \end{bmatrix}$

为 ξ 方向的流速，即法向流速； u 为切向流速； U_l 和 U_r 为常数。

式(4)的解有四种可能，即常数解、稀疏波、激波及滑移线^[14]。

2 底坡源项的处理

求解守恒型非平底浅水流动方程时，需对底坡源项作特殊的处理，以致方程左端的压力项与方程右端的底坡源项在每个单元内“和谐”。所谓“和谐”格式，对于与 i 单元相邻的所有 j 单元，若满足

$$\begin{cases} h_i^n + b_i = h_j^n + b_j = z \\ (u, v)_i^n = (u, v)_j^n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 z 为水位。则要求推得

$$\begin{cases} h_i^{n+1} + b_i = z \\ (u, v)_i^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

为建立和谐的有限体积法，要求方程左端的压力项与方程右端的底坡源项之和始终满足

$$\nabla \left[\frac{1}{2}gh^2 \right] + gh \nabla b = gh \nabla z \quad (7)$$

因此，建立和谐格式的关键是底坡源项的离散与压力项相同。

定义单元界面处底高程

$$b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(b_i + b_j) \quad (8)$$

插值前水深先要转换成水位^[1], 并应用许为厚、潘存鸿^[12]的“水位床底方程法(Water Level-bottom topography Formulation, 简称 WLF)”。事实上, 该方法与 Zhou 等^[10]的“水面梯度法(Surface Gradient Method, 简称 SGM)”的结果相同, 只是出发点不同。界面处水深为

$$h_{ij} = (h_i + b_i - b_{ij}) \quad (9)$$

对于一阶精度的计算格式, 由于假定单元内的水位相同, 根据式(7), 则有 $\nabla \left[\frac{1}{2} g h^2 \right] = -g h \nabla b$ 。此式表明, 动量方程右端的底坡源项可用方程左端的压力项来代替。因此, 式(3)变为

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{t}{A_i} \sum_{j=1}^3 F_{nj} l_j + \frac{t}{A_i} \sum_{j=1}^3 S_{0ij} l_j + t S_{fi} \quad (10)$$

$$\text{式中 } S_{0ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g h_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

为提高计算精度, 可应用与 MUSCL 类似的方法, 将上述空间一阶精度格式扩展到空间二阶精度。

设单元为 i , 插值变量为 f , 插值后的值 f_{ij} 为^[17]

$$f_{ij} = f_i + \partial_i \nabla f_i (X_j - X_i) \quad (12)$$

$$\text{式中 } \partial_i = \frac{1}{\partial} \int_{\partial} f \bar{n} dl \quad (13)$$

$$\partial_i = \min(\partial_j) = \begin{cases} \min \left(1, \frac{f_{M_i} - f_i}{f_j - f_i} \right) & f_j > f_i \\ \min \left(1, \frac{f_{m_i} - f_i}{f_j - f_i} \right) & f_j < f_i \\ 1 & f_j = f_i \end{cases} \quad (14)$$

式中 f_i 为单元 i 的物理量; X_i 为单元 i 形心处的坐标矢量 (x, y) ; ∂ 由单元 i 共边三角形形心组成的三角形面积和连线; $f_j (j=1, 2, 3)$ 为三角形单元 i 三个顶点的物理量; f_{M_i} 和 f_{m_i} 分别为单元 i 以及与其共边三角形中 f 的最大值和最小值。

应用式(12)求得界面处水位 z_{ij} , 定义界面处水深

$$h_{ij} = z_{ij} - b_{ij}$$

式中界面处底高程 b_{ij} 仍由式(8)定义。

通过比较一阶格式, 为满足和谐条件, 将底坡源项离散成如下形式

$$S_{0ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} g (h_{ij} + h_i) (b_{ij} - b_i) \end{bmatrix} \quad (15)$$

以后计算与一阶格式相同。可以证明, 应用式(15)离散底坡源项, 格式是和谐的。

设水流 n 时刻满足式(5), 则式(3)中的动量方程简化为

$$0 = -\frac{t}{A_i} \sum_{j=1}^3 g h_{ij}^2 l_j - \frac{t}{A_i} \sum_{j=1}^3 g (h_{ij} + h_i) (b_{ij} - b_i) l_j$$

整理化简得

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} g (h_{ij} + h_i) (z_{ij} - z_i) l_j = 0$$

上式满足式(7), 表明格式是和谐的。从另一角度看, 由于二阶精度数据重构仍保持静水条件, 即 $z_{ij} = z_i$, 因此, 可推得式(6)。

3 算 例

3.1 算例 1：静水问题

本算例用来检验格式和谐性。计算域为正方形， $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$ 和 $0 \leq y \leq 1 \text{ m}$ 。底高程 $b(x, y)$ 为

$$b(x, y) = 0.8 \exp\{-50[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]\}$$

初始条件为静水，即流速 $u = v = 0$ ，水位 $z = 1 \text{ m}$ 。三角形单元分别为 1250 个 (25×50)，和 5000 个 (50×100)。计算到 $t = 0.1 \text{ s}$ 时整个计算域水位与初始水位 $z = 1 \text{ m}$ 的最大偏差分别为 1.5×10^{-15} (1250 个单元) 和 2.1×10^{-14} (5000 个单元)。这与文献 [14] 的结果几乎相同。

3.2 算例 2：斜水跃问题

超临界流遇收缩角为 30° 的边壁，形成角度为 30° 的斜水跃。计算域长 40 m，左边宽度为 30 m，边壁收缩角 $\alpha = 8.95^\circ$ ，底高程为 0。初始条件和入流边界条件为均匀超临界流，水位 $z = 1 \text{ m}$ ，流速 $u = 8.57 \text{ m/s}$ ， $v = 0$ ，相应的 Froude 数 $Fr = 2.74$ 。计算网格为三角形，单元数为 9600。计算采用空间二阶精度，计算结果见图 1 和图 2。激波线角度 $\beta = 30^\circ$ ，激波后水位 $z = 1.50 \text{ m}$ ，流速 $u = 7.953 \text{ m/s}$ ，相应的 $Fr = 2.074$ 。与 Hager 等的精确解 [18]， $\beta = 30^\circ$ ， $z = 1.5 \text{ m}$ ， $u = 7.956 \text{ m/s}$ 和 $Fr = 2.075$ 非常接近。

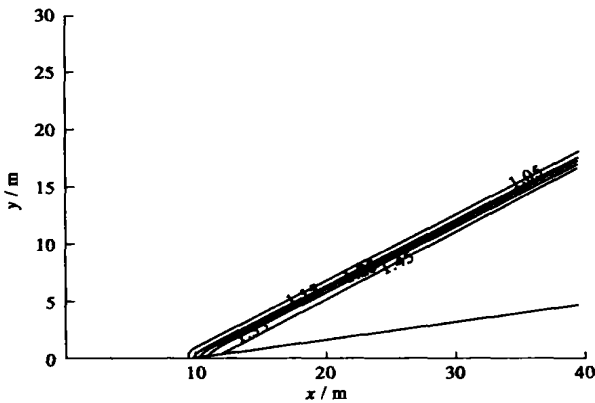


图 1 斜水跃水位等值线图

Fig. 1 Contours of water level for oblique hydraulic jump

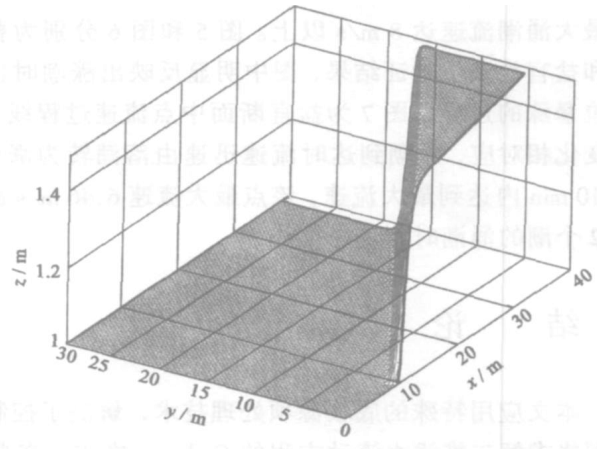


图 2 斜水跃水面三维图

Fig. 2 Three-dimensional view of water surface for oblique hydraulic jump

3.3 算例 3：钱塘江涌潮数值模拟

计算区域从上游仓前到下游激浦，全长 72 km，单元数 1080 个，最小边长约 200 m (图 3)，相应时间步长 10 s。计算地形采用 2000 年 7 月实测，上、下水边界均给定实测潮位过程，边界流速应用一维特征线方法求得 [16]；陆边界采用滑移条件；动边界采用改正的干底 Riemann 解处理 [19]。

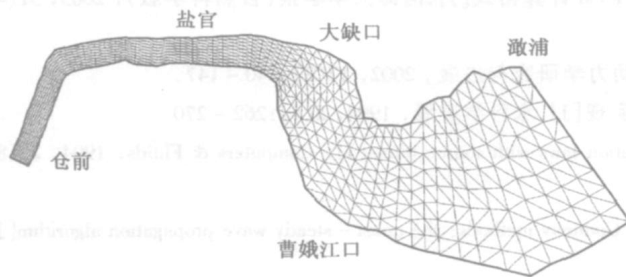


图 3 钱塘江计算网格图

Fig. 3 Computational meshes for Qiantang estuary

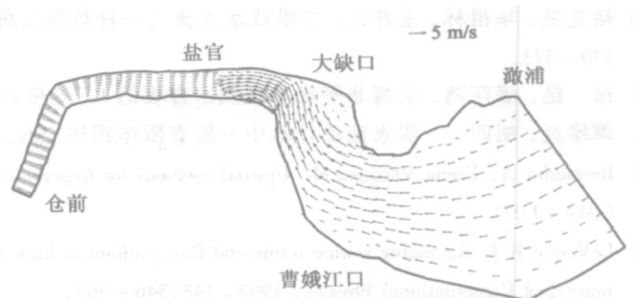


图 4 涌潮时刻计算流场图

Fig. 4 Computational velocity field during the tidal bore

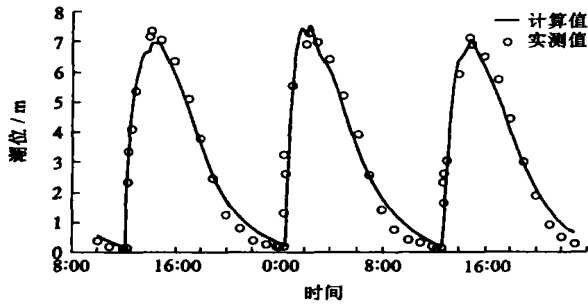


图5 曹娥江口潮位验证结果

Fig. 5 Verified tidal level at the mouth of Caoe river

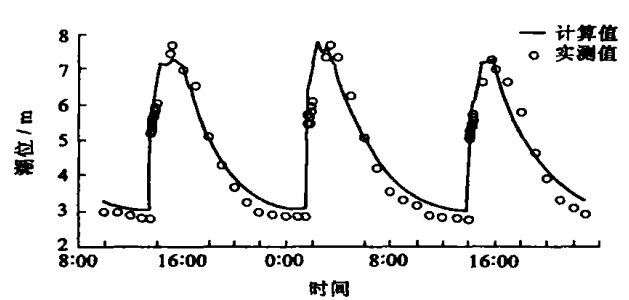


图6 盐官潮位验证结果

Fig. 6 Verified of tidal level at Yanguan gauge

计算了2000年9月16~17日连续3个大潮的流场(激涌最大潮差7.72 m), 计算结果复演了钱塘江涌潮形成和发展的过程。图4为涌潮到达盐官附近时流速矢量图, 计算最大涌潮流速达8 m/s以上。图5和图6分别为曹娥江口和盐官处潮位验证结果, 图中明显反映出涨潮时(涌潮)潮位暴涨的过程。图7为盐官断面中点流速过程线, 与潮位变化相对应, 涌潮到达时流速迅速由落潮转为涨潮, 并在10 min内达到最大流速, 该点最大流速6.46 m/s出现在第2个潮的涌潮时刻。

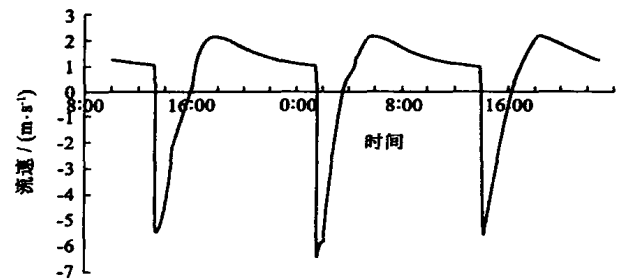


图7 盐官断面中点流速过程

Fig. 7 Velocity graph at the middle of Yanguan's section

4 结 论

本文应用特殊的底坡源项处理技术, 解决了控制方程因压力项与底坡源项产生的不和谐, 建立了基于三角形网格求解二维浅水流动方程的Godunov格式。在典型算例验证的基础上, 模型应用到钱塘江河口涌潮计算。结果表明, 模型具有精度高, 稳定性好, 能模拟间断流动的能力, 且边界适应性强, 能广泛应用于工程实际问题。本文提出的底坡源项离散方法适用于基于三角形网格的有限体积法, 具有较大的推广价值。

参考文献:

- [1] 胡四一, 谭维炎. 无结构网格上二维浅水流动的数值模拟[J]. 水科学进展, 1995, 6(1): 1-9.
- [2] 谭维炎. 计算流体力学——有限体积法的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
- [3] 褚克坚, 华祖林, 王惠民. 二维浅水水流的一种新型三角形网格FVM计算格式[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2003, 31(4): 370-373.
- [4] 徐 昆, 潘存鸿. 求解非平底一维浅水方程的KFVS格式[J]. 水动力学研究与进展, 2002, 17(2): 140-147.
- [5] 谭维炎, 胡四一. 浅水流动计算中一阶有限体积法Osher格式的实现[J]. 水科学进展, 1994, 5(4): 262-270.
- [6] Bermudez A, Elena Vazquez M. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms[J]. Computers & Fluids, 1994, 23(8): 1049-1071.
- [7] LeVeque R.J. Balancing source terms and flux gradient in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 148: 346-365.
- [8] Bermudez A, Dervieux A, Desideri J, et al. Upwind schemes for two-dimensional shallow-water equations with variable using unstructured meshes[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1998, 155: 49-72.
- [9] Vazquez-Cendon M.E. Improved treatment of source terms in upwind schemes for shallow-water equation in channels with irregular geometry[J].

- Journal of Computational Physics, 1999, 148: 497 - 526.
- [10] Zhou J G, Causon D M, Mingham C G, *et al.* The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations [J]. Journal of Computational Physics, 2001, 168:1 - 25.
- [11] Gascon L, Corberan J M. Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 172: 261 - 297.
- [12] Hui WH, Pan Cunhong. Water level-bottom topography formulation for the shallow-water flow with application to the tidal bores on the Qiantang river[J]. Computational Fluid Dynamics Journal, 2003, 112(3): 549 - 554.
- [13] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. 水科学进展, 2003, 14(4): 430 - 436.
- [14] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 求解二维浅水流动方程的 Godunov 格式[J]. 水动力学研究与进展, 2003, A 辑, 18(1): 16 - 23.
- [15] Audusse E, Bristeau M O. A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 206: 311 - 333.
- [16] Pan Cunhong, Lin Bingyao, Mao Xianzhong. New development in the numerical simulation of the tidal bore[A]. Proceedings of the International Conference on Estuaries & Coasts[C]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2003, 1: 99 - 114.
- [17] 宋松和, 李荫藩. 解二维标量双曲型守恒律的满足极值原理无结构三角形网格有限体积法[J]. 数值计算与计算机应用, 1997, (2): 106 - 113.
- [18] Hager W H, Schwalt M, Jimenez O, *et al.* Supercritical flow near an abrupt wall deflection[J]. Journal of Hydraulic Research, 1994, 32(1): 103 - 118.
- [19] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 浅水问题动边界数值模拟[J]. 水利水运工程学报, 2004(4): 1 - 7.

Well-balanced Godunov-type scheme for 2D shallow water flow with triangle mesh^{*}

PAN Cun-hong

(Zhejiang Institute of Hydraulics and Estuary, Hangzhou 310020, China)

Abstract : In order to establish a special well-balanced scheme technique for dealing with source term due to bottom topography constructed, this paper develops a well-balanced Godunov-type scheme of the second-order accuracy for 2D shallow water flow with triangle mesh. The numerical flux of the interface between cells are computed by the exact Riemann solver, and the improved dry Riemann solver is used to deal with wet/dry problem. The model is verified to compute some typical examples and the tidal bore on the Qiantang river. The results show that the scheme is robust and accurate, and worthy to be brought into wide use.

Key words : 2D shallow water equations; triangle mesh; Godunov-type scheme; source term due to bottom topography; Riemann solver

* The study is financially supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 40106010).