

基于非充分掺混模式的流域来水组成模型

王船海, 朱 琰, 程文辉, 向小华

(河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要: 针对如何减小数值求解对流输运方程耗散误差的问题, 引进断面计算浓度的概念来计算河段平均浓度, 提出了非充分掺混模式的有限控制体积法离散对流输运方程的新算法, 据此构建了模拟流域内的水源组成以及不同水源在流域内的时空变化情况的流域来水组成模型。通过数值试验与具体实例验证, 结果表明所提出的非充分掺混模式的新算法可有效地提高流域来水模型的计算精度。

关键词: 非充分掺混; 断面计算浓度; 流域来水组成; 对流输运方程; 有限体积法

中图分类号: P131.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2008)01-0094-05

流域上游地区一般是树状分布河网, 上一级河道总是汇入下一级河道, 位于河道下游断面的流量总是上游汇集的结果, 某个断面的来水组成基本上可以由上游汇集河道的流量来确定; 对于流域中下游平原河网地区, 特别是人工建筑物众多, 又受潮汐影响的地区(例如: 太湖流域), 河网错综复杂, 水流流向不定, 要确定某处水流的去处或某个河段的水体、流量的来源往往非常困难。在生产实践中往往对这些问题很感兴趣, 例如“引江济太”从常熟枢纽引长江水流进入望虞河后, 流向何处? 河网中各断面流量或各河段水体中常熟枢纽引江水量占多少比重? 如果能够了解这些信息, 就可以分析常熟枢纽引江的效果及影响范围。来水组成模型模拟流域内的水源组成以及不同水源在流域内的时空变化情况, 可用于工程影响分析、防洪除涝、供水及流域规划, 还可以定量分析流域内水资源的分配与使用情况, 为流域水资源管理提供决策支持。

流域来水组成模型的基本原理是假设以保守物质的浓度作为指标^[1, 2], 把各种水源成分看成不同的保守物质, 认为各水源成分在河网中运动时只发生物理作用即推移与稀释混合不发生化学变化, 沿程不损耗, 模型最终归结为求解河网对流方程组。文献[1, 2]中采用充分掺混假定的离散格式, 计算误差较大, 本文在此基础上重点研究高精度离散格式。

1 流域河网物质输运模型

保守物质在水体中运动可以用对流输运方程来描述:

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 暂没有考虑旁侧入流; A 为过水断面面积, m^2 ; C 为保守物质浓度, 在来水组成研究中为量纲一单位; Q 为流量, m^3/s 。

对流输运方程所描述的物理现象虽然简单, 但要得到高精度的数值解并非易事, 主要是由于数值解容易产生数值耗散、数值弥散以及不稳定等问题。对流方程的求解一直是众多学者关注的焦点, 已研究出许多高精度的求解格式^[3]。从实用的角度讲, 对流方程高精度的求解格式应具有如下主要特征: ①严格的守恒性; ②尽量小的数值耗散与数值弥散; ③高稳定性。目前在河网水质模型^[4, 5]中大数目的实用型格式均是采用的隐式有限控制体积法, 有较好的守恒性与稳定性, 但由于在构造离散格式时, 计算控制体积内的质量采用了充分掺混

收稿日期: 2007-03-05

作者简介: 王船海(1963-), 男, 江苏海安人, 副教授, 主要从事计算水力学、水文水资源、地理信息系统及数字流域等方面的研究。E-mail: wangchuanhai@vip.sina.com

假定, 这些格式具有较大的数值耗散。

1.1 控制体出入流为正方程离散

控制体的划分与水量模型一致, 如图 1 所示断面 $i-1 \sim$ 断面 i 为相应微段的控制体积; 关于水量模型的算法可参见文献[6]。抛弃充分掺混假定, 假定物质浓度在控制体内呈直线变化。

对于某一断面 i 设有两个浓度, 即左右浓度 Cl_i 、 Cr_i , 对于流量为正的情况 Q_i 为实测浓度, Cr_i 为计算浓度。在控制体积 $i-1 \sim i$ 内, 时段初断面 $i-1$ 和断面 i 的物质浓度为 Cr_{i-1}^0 和 Cl_i^0 , 断面流量分别为 Q_{i-1} 、 Q_i , 流量过程由河网水动力学模型求解得到^[6]。设 $Q_{i-1} > 0$ 、 $Q_i > 0$, 时段末上游流入该控制体的浓度为 Cl_{i-1} , 如图 2 所示。经过 Δt 后, 随着水流有物质质量 $Q_{i-1} * Cl_{i-1} * \Delta t$ 从断面 $i-1$ 进入控制体积内, 实际上物质浓度沿程变化如图 2 中粗线所示。

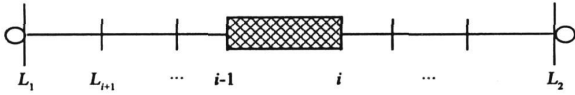


图 1 河道控制体积示意图

Fig. 1 Sketch of limited control volume

断面 $i-1$ 的浓度等于入流浓度 Cl_{i-1} , 如果采用浓度沿程呈直线变化假定, 当波没有传到断面 i , 如图 2 所示情况, 粗线表示为实际浓度沿程变化。为了保持微段内质量守恒, 断面 i 的浓度必定小于 Cr_i^0 , 甚至出现负值等不合理现象。产生这种现象的根本原因是浓度沿程呈直线变化的假定与实际情况不符。实际上浓度沿程变化是难以确定的, 在模拟计算中只能采用直线变化假定, 同时要求满足下列三个假定 ① 浓度沿程呈直线变化; ② 下游断面不产生“负波”; ③ 满足物质守恒。

满足上述要求的断面 $i-1$ 的计算浓度不能直接取上游流入的浓度, 而应根据上面三条基本假定来反推, 称为断面计算浓度。经过 Δt , 通过断面 $i-1$ 输送到河段的物质增量为

$$M_1 = (Cl_{i-1} - Cr_{i-1}^0) Q_{i-1} \Delta t \quad (2)$$

M_1 的大小与浓度差 $(Cl_{i-1} - Cr_{i-1}^0)$ 、流量 Q_{i-1} 及计算时段长 Δt 有关。断面 $i-1$ 、 i 之间物质浓度假定呈线性变化, 断面 i 处不出现负波, 同时又要满足质量守恒, 因此要求图 2 中三角形面积 M_2 表示的物质质量必须与 M_1 相等。

$$M_2 = 0.5 \Delta x (A_1 + A_2) dc \quad (3)$$

式中 A_1 、 A_2 为断面 $i-1$ 、 i 的过水面积。令 $M_1 = M_2$ 并经整理后, 断面 $i-1$ 的计算浓度 Cr_{i-1} 可由下式计算:

$$Cr_{i-1} = a_{i-1} + b_{i-1} Cl_{i-1} \quad (4)$$

式中 $a_{i-1} = (1 - \omega) Cr_{i-1}^0$; $b_{i-1} = \omega$, $\omega = \frac{2Q_{i-1}\Delta t}{(A_{i-1} + A_i)\Delta x}$; ω 为反映波传播速度的一个指标, 当 ω 小于 1 时, 说明波还没有传到下游断面, 断面 $i-1$ 的计算浓度介于初始浓度与流入断面的浓度之间; 当 $\omega = 1$ 时, 波刚好抵达下游断面, 断面 $i-1$ 的浓度刚好等于流入断面的浓度; 当 ω 大于 1 时, 取 $\omega = 1.0$ 。断面 $i-1$ 的计算浓度虽然不是该断面的实际浓度, 但用它与下断面浓度按线性变化假定来计算微段内的物质质量是正确的, 即可用它来计算微段的平均浓度。

对该控制体式(1)的离散方程如下:

$$\frac{\bar{A}_{i-1/2} (Cr_{i-1} + Cl_i)}{2\Delta t} - \frac{\bar{A}_{i-1/2}^0 (Cr_{i-1}^0 + Cl_i^0)}{2\Delta t} + \frac{Q_i Cl_i - Q_{i-1} Cl_{i-1}}{\Delta x} = 0 \quad (5)$$

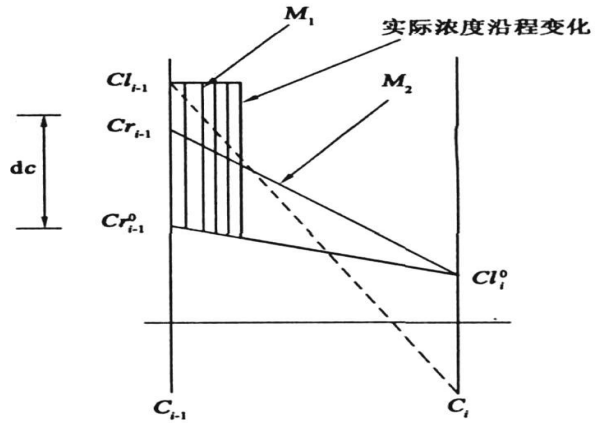


图 2 控制体出入流为正离散结构

Fig. 2 Structure of positive flux to control volume

式中 $\bar{A}_{i-1/2} = \frac{A_{i-1} + A_i}{2}$ 为时段末微段平均过水面积; $\bar{A}_{i-1/2}^0 = \frac{A_{i-1}^0 + A_i^0}{2}$ 为时段初微段平均过水面积。

经整理后差分方程可以写成:

$$\lambda Cr_{i-1} + \varphi Cl_i = W + Q_{i-1} Cl_{i-1} \quad (6)$$

$$\text{式中 } \lambda = \frac{\bar{A}_{i-1/2} \Delta x}{2 \Delta t}; \quad \varphi = \frac{\bar{A}_{i-1/2} \Delta x}{2 \Delta t} + Q_i; \quad W = \frac{\bar{A}_{i-1/2}^0 (Cr_{i-1}^0 + Cl_i^0) \Delta x}{2 \Delta t}$$

利用式(4)消去方程式(6)中的 Cr_{i-1} , 经整理后得

$$Cl_i = \theta_i + \lambda Cl_{i-1} \quad (7)$$

$$\text{式中 } \theta_i = \frac{W - a_{i-1} \lambda}{\varphi}; \quad \lambda = \frac{Q_{i-1} - b_{i-1} \lambda}{\varphi}。$$

用式(7)求得的 Cl_i 不会出现“负波”等不合理现象。式(7)的形式与式(4)相同, 控制体下断面浓度亦是上游流入浓度的简单线性方程。

1.2 控制体出入流为负方程离散

如图 3 所示对于控制体出入流为负的情况类似的处理, 可以得下面两关系式:

$$\begin{cases} Cl_i = a_i'' + b_i'' Cr_i \\ Cr_{i-1} = \theta_{i-1}' + \lambda_{i-1}' Cr_i \end{cases} \quad (8)$$

1.3 控制体水流从两端流进方程离散

如图 4 所示控制体水流从两端进的情况, 可直接得到如下 2 个方程:

$$\begin{cases} Cr_{i-1} = a_{i-1}' + b_{i-1}' Cl_i \\ Cl_i = a_i'' + b_i'' Cr_i \end{cases} \quad (9)$$

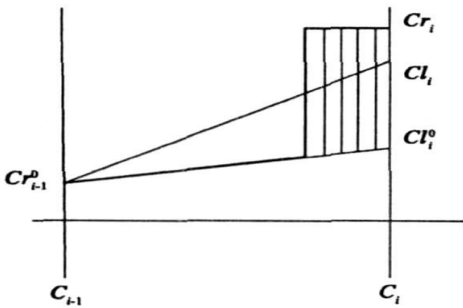


图 3 控制体出入流为负离散结构

Fig 3 Structure of negative flux to control volume

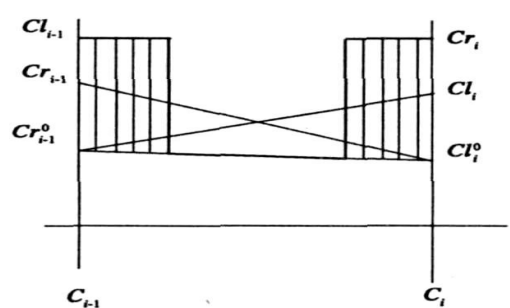


图 4 控制体水流从两端进离散结构

Fig 4 Structure of both inflow to control volume

1.4 控制体水流从两端流出方程离散

对控制体水流从两端流出的情况, 控制体河段在计算时段内, 没有从上、下断面流入的流量, 在没有源或汇的情况下, 该河段的浓度是不变化的。因此时段末物质浓度取决于已知条件, 即时段初物质质量及计算时段增减的源或汇, 控制体河段浓度可取平均浓度 $\bar{C}$, 即如下表达式:

$$\begin{cases} Cr_{i-1} = \bar{C} \\ Cl_i = \bar{C} \end{cases} \quad (10)$$

1.5 河网物质输运模型

由式(4)、式(7)、式(8)、式(9)及式(10)可见, 图 1 中的河道有 $L_2 - L_1 + 1$ 个断面, 每个断面有 2 个未知变量 (Cr_i 、 Cl_i), 可建立 $2(L_2 - L_1)$ 个离散方程, 因此可以导出如下表达式:

$$\begin{cases} Cr_i = \alpha_i + \beta_i Cl_{L1} + \gamma_i Cr_{L2} & (i = L_1, \dots, L_2 - 1) \\ Cl_i = \xi_i + \eta_i Cl_{L1} + \phi_i Cr_{L2} & (i = L_1 + 1, \dots, L_2) \end{cases} \quad (11)$$

式中 Cl_{L1} 、 Cr_{L2} 分别等于相应的节点浓度。

根据流域动力模型的概化^[6], 可将流域概化为湖泊水库零维要素、河道一维要素及闸坝等要素, 这些要素中的其它要素的离散及节点浓度方程的构建与求解可参见文献^[2]。

2 算 例

2.1 数值试验算例

设一矩形断面河槽, 长 6 km, 断面宽 50 m, 底高 0 m, 河槽上端封闭, 下端通海, 水位按正弦波以 3 m 高程为中心, 振幅 2 m, 周期 12 h, 周期性变化。计算初始条件假定水槽为静止水流, 水面高程为 3 m, 为了适应边界水位变化, 取计算时步长为 15 min, 即 $\Delta t = 900$ s。没有旁侧入流, 假定水体初始浓度为 $C_1 = 1.0$ (初始蓄量), 下游潮水浓度为 $C_2 = 1.0$ 。

采用充分掺混格式^[1,2] 分别计算空间步长 Δx 为 3000.0 m、1000.0 m、500.0 m 和 1 m 以及本文提出的算法式(4)、式(7)~(11) (空间步长 Δx 为 3000.0 m), 取中间断面 ($x = 3000.0$ m) 处的日平均浓度过程线作为对比, 由图 5 可见, 本文推荐的方法可以获得相当于充分掺混假定下 Δx 为 1000.0 m 的精度, 本文所介绍的格式精度与充分掺混格式的精度相比, 有了较大的提高。

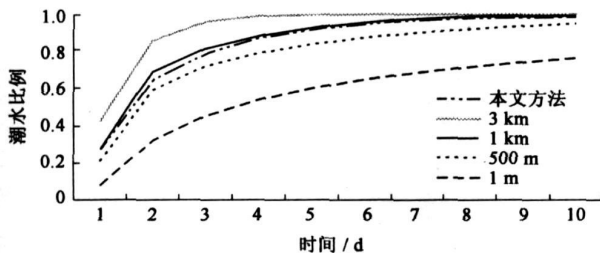


图 5 充分掺混法与本文提出的方法计算对比图

Fig. 5 Comparison of the sufficient mixing method and the method proposed by the paper

2.2 太湖流域实例应用

分别用充分掺混方法及本文提出的方法, 对 1971 年 5 月 1 日至 7 月 31 日进行计算, 以黄浦江中各断面的吴淞口潮水来水所占比重为例说明。从图 6 中可见, 充分掺混假定使下游吴淞口来水容易向上游扩散, 吴淞口来水可以上溯到拦路港, 使黄浦江各断面的吴淞口来水比重加大。而本文提出的方法扩散速度远小于前者, 比较符合实际情况。

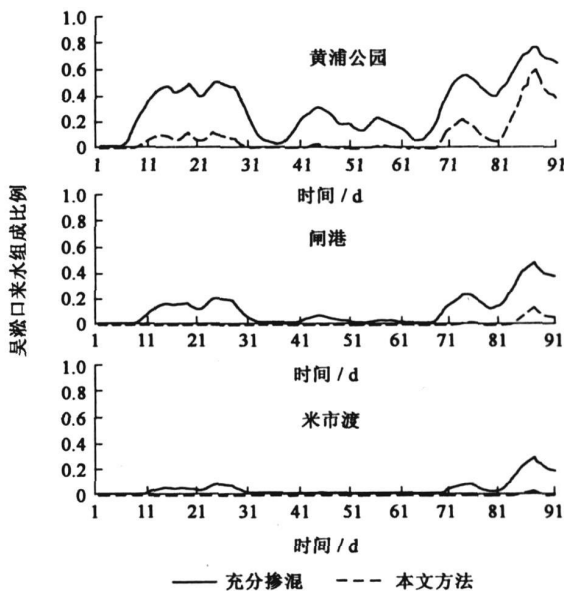


图 6 黄浦江苏州河沿岸吴淞口来水组成过程对比图

Fig. 6 Comparison of mixed water process of Wusongkou

3 结 论

利用非充分掺混的有限控制体积法离散对流输运方程, 通过引进断面计算浓度的概念较为准确地计算出河段平均浓度, 通过数值试验与具体实例的验证, 说明了本文所提出的算法可有效地提高模型精度。

来水组成模型可以作为水质模型构造的基础, 来水组成模型中各种来水组分的总和应等于 1.0 或 100%, 可通过这个标准来检验模型程序的正确性, 来水组成模型经改进后可形成水质模型。采用本文介绍的非充分掺混离散算法建立的流域水量水质动力模型, 已广泛应用于太湖流域的诸多问题的研究中。

参考文献:

- [1] 杨 珏, 赵永军, 程文辉. 来水组成模型[J]. 河海大学学报, 1994(10): 6– 10.
- [2] 朱 琰, 陈 方, 程文辉. 平原河网区域来水组成原理[J]. 水文, 2003, 23(2): 21– 24.
- [3] 张小峰, 张红武. Crank– Nicolson 格式精度的改进[J]. 水科学进展, 2001, 12(1): 33– 38.
- [4] 汪守东, 沈永明, 姜恒志. 基于未确知信息的环状河网水质数学模型研究[J]. 水科学进展, 2007, 18(6): 871– 878.
- [5] 褚君达. 河网对流输移问题的求解及应用[J]. 水利学报, 1994(10): 14– 23.
- [6] 王船海, 李光炽. 流域洪水模拟[J]. 水利学报, 1996(3): 44– 50.

Mixed-water model of watershed based on incomplete mixing pattern

WANG Chuan-hai, ZHU Yan, CHENG Wei-hui, XIANG Xiao-hua

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to reduce the numerical diffusion error of the convey-diffuse equation, the concept of concentration on cross section is introduced to calculate the mean concentration of river sections, and a new finite control volume method is put forward based on the incomplete mixing pattern. Depending on above concept, a income water component model is set up, which simulates the water source composition of the basin and describes the spatio-temporal changes of different water sources. By applying the present method in calculation, the results are in agreement with the measured data, indicating that the present method of incomplete mixing pattern can improve the accuracy of income water calculation.

Key words: incomplete mixing; concentration on cross section; income water component; convey-diffuse equation; finite control volume method