

基于适体坐标变换的二维河冰模型

茅泽育, 许 昕, 王爱民, 赵雪峰, 肖 汉

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 为精确模拟流动边界条件, 克服边界形状复杂、长宽尺度相差悬殊及由于水位变化引起计算边界变化等困难, 针对天然河道边界弯曲复杂等特点, 应用水动力学和热力学等原理, 建立了适体坐标下的二维河冰数值模型, 模型主要包括流速场, 水温沿河道变化, 水内冰浓度分布, 面冰输移, 冰盖推进、稳定和消融, 冰盖下冰的输移、堆积和冲蚀等, 考虑了冰盖底部水中冰堆积和冰盖前沿形状对封冻过程的影响。采用 MacComack 步进格式计算方法, 并应用黄河河曲段实测资料对数值模拟结果进行了验证。验证结果表明, 提出的数值模型能较好地体现河道的封冻过程。

关键词: 河流冰情; 天然河道; 适体坐标; 二维河冰模型

中图分类号: TV875 文献标识码: A 文章编号: 1001-6791(2008)02-0214-10

河流冰情演变涉及到水力、气象、热力、河道特征等众多因素^[1-4]。天然河道流动特性比顺直渠道复杂, 尤其是弯道流动, 其水力要素、冰盖体厚度及形状等并非均匀。与河口、海湾等宽广水域中二维流场计算相比, 河道中的流场计算更为复杂, 主要表现为后者边界复杂, 两岸弯曲且多弯道, 直角坐标系很难精确处理复杂几何边界。

近 20 多年以来, 研究者提出了许多描述河道封冻过程的理论, 并根据这些理论研制了不少模拟河道冰情的一维数值模型。一维河冰模型仅适用于顺直河渠中的河冰现象, 只能模拟水流和冰情的断面平均值沿流程的变化。对于天然河道, 水深、流速和冰盖厚度沿河宽方向的变化往往相当显著, 显然, 在进行冰情分析及数值模拟时, 考虑物理量沿河宽的变化更为合理。

作为一种数值网格自动生成技术, 适体坐标变换方法(简称 BFC)在计算流体动力学、航空动力学和热力学等领域得到了广泛应用。适体坐标系是一种曲线坐标系, 不管边界如何复杂曲折, 自动生成的网格线都可与边界重合, 因此能精确表示复杂几何边界和相应的边界条件。如图 1 所示, 求解问题变换在固定矩形正交网格系上进行。

本文采用适体坐标, 在一维河冰模型基础上, 建立了二维适体坐标系统下的河冰数值模型, 包括河道水力学模型、输冰模型、热力学模型及冰冻模型等。

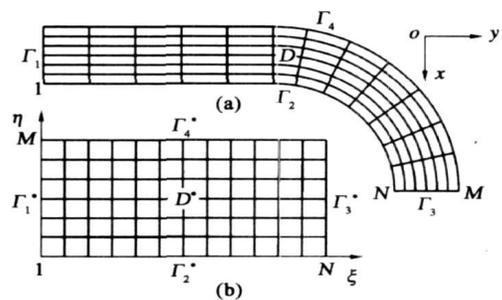


图 1 物理平面计算域及变换平面计算域
Fig. 1 $(x-y)$ domain and $(\xi-\eta)$ domain

收稿日期: 2007-06-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50579030)

作者简介: 茅泽育(1962-), 男, 浙江绍兴人, 副教授, 博士, 主要从事水力学及河流动力学研究。

E-mail: maozeyu@tsinghua.edu.cn

1 二维河冰数学模型

1.1 河道水力学模型

为保证计算时无守恒误差, 采用守恒变量形式的二维浅水控制方程, 取沿流程方向为 x , 河宽方向为 y , 并考虑冰盖底部阻力作用, 则二维非恒定流基本方程为^[3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) = hb'_x - gh \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\partial t_i}{\partial x} = b_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = hb'_y - gh \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\partial t_i}{\partial y} = b_y \quad (3)$$

式中 ρ 和 ρ_i 分别为水和冰的密度; h 为水深; t_i 为冰盖厚度; $q_x = hu$ 、 $q_y = hv$ 为单宽流量; u 、 v 为沿 x 、 y 方向流速分量。无冰盖时: $b'_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} = -g \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{ax} - \tau_{bx}}{\rho h} + F_{bx}$, $b'_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} = -g \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\tau_{ay} - \tau_{by}}{\rho h} + F_{by}$; 有冰盖时: $b'_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} = -g \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{ix} - \tau_{bx}}{\rho h} + F_{bx}$, $b'_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} = -g \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\tau_{iy} - \tau_{by}}{\rho h} + F_{by}$, 其中, p_a 为水面大气压; z_b 为河床高程; $z = z_b + h$ 为水面高程; $\tau_b = \tau_{bx} i + \tau_{by} j$ 为床面阻力; $\tau = \tau_{ix} i + \tau_{iy} j$ 为冰盖底部阻力; 风成剪切应力 $\tau_a = \tau_{ax} i + \tau_{ay} j = \rho_a C_D |w_a| \bar{w}_a$, 其中 ρ_a 为大气密度, w_a 为风速, C_D 为风成剪力系数, $\tau_{ax} = |\tau_a| \cos \theta_a$, $\tau_{ay} = |\tau_a| \sin \theta_a$, θ_a 为风速与河流下游方向的夹角; $F_{bx} (= fv)$ 、 $F_{by} (= -fu)$ 分别为 x 、 y 方向的柯氏力, 其中柯氏力系数 $f = 2\bar{\omega} \sin \theta$, θ 为纬度; $\bar{\omega}$ 为地球自转角速度。根据谢才公式得到 $\tau_b = \rho g |V| V n^2 / R^{1/3}$, 对于宽浅式河道有 $R \approx h$, 因此床面阻力为

$$\tau_{bx} = \rho g n_b^2 u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad \tau_{by} = \rho g n_b^2 v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad (4)$$

若存在冰盖, 则冰盖底部及床面的阻力为

$$\tau_{ix} + \tau_{bx} = \rho g n_c^2 u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad \tau_{iy} + \tau_{by} = \rho g n_c^2 v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad (5)$$

式中 n_b 为河床糙率; n_c 为封冻河道的复合糙率, 采用 Sabaneev 复合糙率计算公式^[5,6]:

$$n_c = [(P_b n_b^{3/2} + P_i n_i^{3/2}) / P]^{2/3} \quad (6)$$

式中 n_i 为冰盖底部的糙率; P_b 、 P_i 分别为水流、冰盖的湿周; $P = P_b + P_i$ 为总湿周。

1.2 水流温度场模型

二维时均非恒定水流温度场为二维对流扩散方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p A T) + \frac{\partial}{\partial x} (Q \rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial y} (Q \rho C_p T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A E_x \rho C_p \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A E_y \rho C_p \frac{\partial T}{\partial y} \right) + B \Sigma S \quad (7)$$

式中 T 为垂线平均水温; C_p 为比热; A 为过流断面面积; Q 为断面总流量; B 为水面宽度; E_x 、 E_y 为紊动扩散系数; ΣS 为水体与周围环境介质的热交换通量。为简单起见, 本文假定 $E_x = E_y = E$, 且河道流量变化较小, 则由上式得

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = E \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{B}{\rho C_p A} \Sigma S \quad (8)$$

1.3 浮冰及水中冰模型

根据分层输冰理论, 敞露河段中的流冰分水面浮冰和悬浮于水中的水内冰。浮冰浓度和水中冰浓度时空分布的控制方程分别为^[7,8]

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + u \frac{\partial C_s}{\partial x} + v \frac{\partial C_s}{\partial y} = - \frac{B}{\rho L_i A} \Sigma S + \frac{\alpha}{A} \left[1 - \frac{V_z}{u_i} \right] C_c \quad (9)$$

$$\frac{\partial C_c}{\partial t} + u \frac{\partial C_c}{\partial x} + v \frac{\partial C_c}{\partial y} = - \frac{B}{\rho L_i A} \Sigma S - \frac{\alpha}{A} \left[1 - \frac{V_z}{u_i} \right] C_c \quad (10)$$

式中 C_s 为浮冰体积浓度; C_c 为悬浮状水中冰体积浓度; L_i 为结冰潜热; α 为水中冰转为浮冰的比例系数^[6]; 冰粒上浮速度 $u_i = -0.025(T_s + \Sigma S/1130) + 0.005$, 其中 T_s 为水面平均温度; $V_z = u \sqrt{g[C(0.7C + 6.0)]}/5$, 其中 C 为谢才系数。

1.4 冰盖推进

根据上游来冰情况及水力条件, 动力冰盖发展分并置推进(平封)、水力增厚(窄封)和机械增厚(宽封)三种模式。根据面冰流量质量守恒, 得到以下冰盖推进速度:

$$V_p = \frac{Q_s^i - Q_u}{B_0 t_i (1 - e_j) - (Q_s^i - Q_u)/V_{SCP}} \quad (11)$$

式中 B_0 为岸冰之间的明流水面宽度; $e_j = e_p + (1 - e_p)e_c$ 为堆积冰盖体的整体孔隙率, 其中 e_p 为流冰块间的堆积体孔隙率; e_c 为单个流冰块的孔隙率; Q_u 为冰盖推进前沿断面处面冰下潜的体积流量, m^3/s , 由流冰在冰盖前沿的稳定性准则确定; $Q_s^i = C_s Q$ 为面冰层的体积输冰流量, m^3/s ; V_{SCP} 为到达冰盖前沿断面的面冰平均行进速度。计算中采用节点隔离法, 即以节点为控制单元, 计算确定前沿各网格节点向前推进距离; 冰盖水力增厚时, 以各节点为基础计算冰盖增厚, 由此确定冰盖动态发展, 其来流速度取与冰盖前沿相垂直的外法向方向上的速度分量。

当水流 Fr 数小于下式, 即 Ashton 下潜临界公式^[9]的计算值时, 冰盖将以并置方式向上游推进, 其厚度等同于上游来冰的厚度。相反, 当大于时, 上游下来的流冰将潜入冰盖下运动, 使冰盖厚度迅速增加, 即形成窄河冰塞, 其冰盖厚度可由平衡条件得到

$$Fr_C = \frac{2 \sqrt{(1 - \rho/\rho) t_{i0}/d(1 - t_{i0}/d)}}{\sqrt{5 - 3(1 - t_{i0}/d)^2}} \quad (12)$$

式中 d 为冰盖前沿断面的水深; t_{i0} 为冰块厚度; 当水流 Fr 数超过 Fr_C 时, 单一冰块并置推进模式不能维持。这时冰盖将以水力加厚方式向前推进(即形成窄河冰塞), 导致冰盖厚度增加、前沿水位壅高、底部水流分离。在时段 Δt 内, 长度 Δx 的河段上的冰盖层厚度变化为

$$\Delta h_i = \frac{Q_s^i \Delta t}{B_0 \Delta x} \quad (13)$$

随着冰盖前沿厚度逐渐增加, 水流弗劳德数下降, 当小于式(12)所示的 Fr_C 时, 冰盖前缘继续向前推进。当作用于冰盖体的纵向作用力超过岸壁阻力时, 将形成宽封冰塞。其平衡宽堵厚度^[10]的表达式为

$$\frac{B_0 V_u^2}{\mu C^2 h^2} \left[1 + \frac{\rho t_i}{\rho R_D} \right] = - \frac{B_0 \tau_{cx}}{g \rho \mu h^2} + \frac{2 \tau_{ti}}{g \rho \mu h^2} + \frac{\rho}{\rho} \left[1 - \frac{\rho}{\rho} \right] \frac{t_i^2}{h^2} \quad (14)$$

式中 V_u 为冰盖下流速; μ 为冰与冰之间的摩擦系数; R_D 为冰盖下水流的水力半径; $\mu_1 = k_1 \tan \phi$ 为岸边阻力系数, k_1 为侧向推挤系数; τ_{cx} 为岸边阻力的凝聚力分量。

1.5 冰盖下输冰

冰盖下输冰能力计算公式为^[11, 12]

$$\phi = 5.487(\Theta - \Theta_C)^{1.5} \quad (15)$$

式中 量纲一输冰能力 $\phi = q_i / (d_n Fr \sqrt{g d_n \Delta})$, $\Delta = 1 - \rho/\rho$; 量纲一水流强度 $\Theta = V_{*,i}^2 / (F^2 g d_n \Delta)$; Θ_C 为量纲一临界剪切力; q_i 为单宽体积输冰流量; $V_{*,i}$ 为冰盖底部的剪切流速; F 为下沉速度系数; d_n 为冰粒标称粒径。

1.6 岸冰宽度

当垂线平均流速 V_s 满足以下条件时, 就开始形成岸冰^[14]:

$$V_s < \frac{\sum S}{1130(-1.1 - T)} - \frac{15w_a}{1130} \quad (16)$$

岸冰形成之后, 由于水面浮冰积聚, 岸冰将沿横向发展, 其横向增长取决于浮冰块与岸冰接触时的稳定性, 并与流冰密度成正比^[11]:

$$\Delta W = \frac{14.1 \sum S}{\rho_i} \left(\frac{u}{V_c} \right)^{-0.93} N^{1.08} \quad (17)$$

式中 V_c 为浮冰粘附于岸冰的最大允许流速; ΔW 为给定时段内岸冰宽度增长; N 为流冰面密度。

2 边界拟合坐标系

为使计算网格精确拟合计算域边界, 将物理平面 ($x-y$ 平面) 上复杂边界经坐标变换 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, 变成 $\xi-\eta$ 平面上的矩形域, 如图 2 所示。通过求解椭圆型偏微分方程得到不规则物面与规则物面一一对应的坐标变换, 即 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, 满足

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (18)$$

及 Dirichlet 边界条件。 P 、 Q 为 ξ 、 η 的连续函数, 只要适当选择 P 、 Q 函数, 就可把 $x-y$ 平面上疏密程度不同的曲线网格变换成 $\xi-\eta$ 平面上均匀的矩形网格。边界适

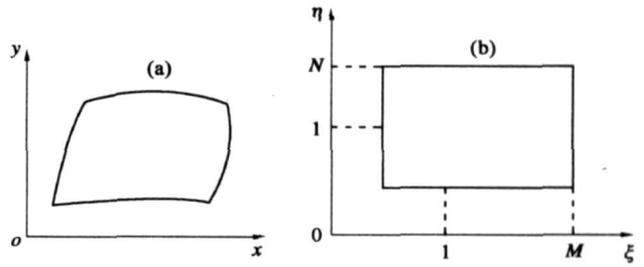


图 2 适体坐标变换

Fig 2 Transformation of BFC method

体坐标系生成的步骤为: 根据需要在 $x-y$ 平面 D 域边界上布置网格点, 如图 1(a), 在 Γ_1 和 Γ_3 边界上布置 M 个点, 在 Γ_2 和 Γ_4 边界上布置 N 个点, 这些点的间距可以不等; D^* 域边界上的网格点与 D 域边界上的网格点相应; 采用中心差分格式, 数值求解泊松方程(18)的逆变换方程:

$$\alpha \xi - 2\beta x \xi \eta + \gamma x \eta + J^2 (P_x \xi + Q_x \eta) = 0 \quad (19)$$

$$\alpha y \xi - 2\beta y \xi \eta + \gamma y \eta + J^2 (P_y \xi + Q_y \eta) = 0 \quad (20)$$

式中 $\alpha = x \eta^2 + y \eta^2$, $\beta = x \xi \eta + y \xi \eta$, $\gamma = x \xi^2 + y \xi^2$, $J = x \eta - x \eta y \xi$ 。满足上述 Dirichlet 边界条件, 其解即为 D^* 域内部网格点 (ξ, η) 所对应的 D 域网格点 (x_i, y_i) 坐标。

3 基本方程组变换及计算

3.1 基本方程组变换

采用链式求导法。令 $\bar{x} = \xi \cdot J$, $\bar{y} = \eta \cdot J$, $\bar{u} = u \cdot J$, $\bar{v} = v \cdot J$, $u \xi = u \bar{x} + v \bar{y}$, $v \eta = u \bar{y} + v \bar{x}$, $q \xi = q_x \bar{x} + q_y \bar{y}$, $q \eta = q_x \bar{y} + q_y \bar{x}$, 其中 $u \xi$ 和 $u \eta$ 分别为 $(\xi - \eta)$ 坐标系中沿 ξ 、 η 方向流速。对方程(1)~(3)进行变换得到以下适体坐标下的连续方程(21)和动量方程(22)、(23):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial q \xi}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial q \eta}{\partial \eta} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{q_x q \xi}{h} + \xi_x \frac{g h^2}{2} \right] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{q_x q \eta}{h} + \bar{\eta}_x \frac{g h^2}{2} \right] = b_x \quad (22)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{q_y q \xi}{h} + \xi_y \frac{g h^2}{2} \right] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{q_y q \eta}{h} + \bar{\eta}_y \frac{g h^2}{2} \right] = b_y \quad (23)$$

若把各类边界条件统一表示为 $A\varphi + B\partial\varphi/\partial n = C$, 其中, A 、 B 、 C 为给定值; $\partial\varphi/\partial n$ 为边界上法向导数, φ 为通用变量。任意函数 f 的梯度为 $\nabla f = (f_{\xi}\xi_x + f_{\eta}\eta_x)i + (f_{\xi}\xi_y + f_{\eta}\eta_y)j$, 分别令 $f = \xi$ 、 η , 则得边界条件变换方程:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^{(\xi)}} = \frac{1}{J\sqrt{q_{11}}}\left[q_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + q_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n^{(\eta)}} = \frac{1}{J\sqrt{q_{22}}}\left[q_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + q_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] \quad (24)$$

式中 $q_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2 = x_{\bar{\eta}}^2 + y_{\bar{\eta}}^2 = \alpha$; $q_{12} = \xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = -\beta$; $q_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2 = \gamma$ 。

类似地, 对方程(8)~(10)进行变化, 得到适体坐标下二维水流温度场、浮冰及水中冰浓度沿程分布的控制方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u\xi T - \frac{E}{J}\left(q_{11}\frac{\partial T}{\partial\xi} + q_{12}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[v\eta T - \frac{E}{J}\left(q_{12}\frac{\partial T}{\partial\xi} + q_{22}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)\right] = \frac{B}{\rho C_p A}\sum S \quad (25)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + \frac{1}{J}\left[\frac{\partial(u\xi C_s)}{\partial\xi} + \frac{\partial(v\eta C_s)}{\partial\eta}\right] = -\frac{B}{\rho L_i A}\sum S + \frac{\alpha}{A}\left[1 - \frac{V_z}{u_i}\right]C_c \quad (26)$$

$$\frac{\partial C_c}{\partial t} + \frac{1}{J}\left[\frac{\partial(u\xi C_c)}{\partial\xi} + \frac{\partial(v\eta C_c)}{\partial\eta}\right] = -\frac{B}{\rho L_i A}\sum S - \frac{\alpha}{A}\left[1 - \frac{V_z}{u_i}\right]C_c \quad (27)$$

3.2 计算方法

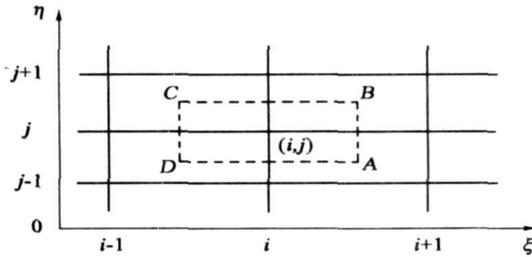


图3 节点控制体示意图

Fig. 3 Discrete scheme

如图3所示, 控制体为 $ABCD$, 控制节点为 (i, j) , 控制体面积为 $\Delta\xi\Delta\eta$, 将式(21)~式(23), 式(25)~式(27)写成向量形式

$$U_i + \frac{1}{J}F_{\xi} + \frac{1}{J}G_{\eta} = b \quad (28)$$

式中 $U = (h, q_x, q_y, T, C_s, C_c)^T$;

$$F = \left[q_{\xi}, \frac{q_x q_{\xi}}{h} + \bar{\eta}_x \frac{gh^2}{2}, \frac{q_y q_{\xi}}{h} + \bar{\eta}_y \frac{gh^2}{2}, \right.$$

$$\left. u\xi T - \frac{E}{J}\left[q_{11}\frac{\partial T}{\partial\xi} + q_{12}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right], u\xi C_s, u\xi C_c \right]^T$$

$$G = \left[q_{\eta}, \frac{q_x q_{\eta}}{h} + \bar{\eta}_x \frac{gh^2}{2}, \frac{q_y q_{\eta}}{h} + \bar{\eta}_y \frac{gh^2}{2}, u\eta T - \frac{E}{J}\left[q_{12}\frac{\partial T}{\partial\xi} + q_{22}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right], v\eta C_s, v\eta C_c \right]^T$$

其离散形式为

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \left[\frac{\Delta t}{\Delta\xi\Delta\eta} \right] \left[\frac{1}{J_{AB}}H_{AB} - \frac{1}{J_{BC}}H_{BC} + \frac{1}{J_{CD}}H_{CD} + \frac{1}{J_{DA}}H_{DA} \right] + \Delta t b^n \quad (29)$$

式中 $H_{AB} = F_{AB}\Delta\eta$; $H_{BC} = G_{BC}\Delta\xi$; $H_{CD} = -F_{CD}\Delta\eta$; $H_{DA} = -G_{DA}\Delta\xi$ 。采用MacCormack步进格式计算, 将每一步计算分成预测和校正两步。在预测步, 先利用 n 时层 $U_{i,j}^n$ 值计算函数 F 、 G 的控制体均值 $\bar{F}_{i,j}$ 与 $\bar{G}_{i,j}$, 然后计算控制面通量, 由差分得到 U 在 $n+1$ 时层的预测值为

$$\bar{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \left[\frac{\Delta t}{\Delta\xi\Delta\eta} \right] \left[\frac{1}{J_{AB}}H_{AB} + \frac{1}{J_{BC}}H_{BC} + \frac{1}{J_{CD}}H_{CD} + \frac{1}{J_{DA}}H_{DA} \right] + \Delta t b^n \quad (30)$$

在校正步, 先由 U 的预测值 $\bar{U}_{i,j}^{n+1}$ 计算 F 、 G 的控制体均值在 $n+1$ 时层的预测值 $\bar{F}_{i,j}$ 与 $\bar{G}_{i,j}$, 然后计算各控制面的通量值。若预测步为前差分, 则校正步为后差分; 若预测步为中心差分, 则校正步也为中心差分, 迭代式为

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\bar{U}_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n - \left[\frac{\Delta t}{\Delta\xi\Delta\eta} \right] \left[\frac{1}{J_{AB}}H_{AB} + \frac{1}{J_{BC}}H_{BC} + \frac{1}{J_{CD}}H_{CD} + \frac{1}{J_{DA}}H_{DA} \right] \right] + \Delta t b^{n+1} \quad (31)$$

为了保持计算的对称性, 结合预测、校正、 i 方向控制面、 j 方向控制面安排前差分和后差分的交替方式。网格节点变量采用交错排列, 这一布置有利于解决动边界问题。

4 模型验证

4.1 黄河河曲段简介

选取黄河河曲段原型观测资料^[15]对本文数值模型进行验证。如图4所示,黄河河曲段上自龙口峡谷,下至天桥水电站,全长70 km。龙口以上为比降陡、流速大的峡谷段,龙口以下河身逐渐变宽,河曲水文站以下,河面又变窄,河段水面比降自上而下呈递减之势。从北元至曲峪26 km范围内集中了5个连续大弯道,其中河段内的石窑卜弯道,曲率半径为0.7 km,该处河床窄深、比降较缓,历年在此首先插凌封河形成冰盖,龙口以上的河段为产冰河段。由于河势、水文、气象条件等影响,该河段容易形成冰塞。天桥电厂建成前,由于冰塞壅水不高,没有形成冰塞灾害,且石窑卜以下河段也不封冻。但自1977年天桥电厂建成后,石窑卜以下河道也封冻,并于1982年1月发生严重冰塞灾害。

本文针对龙口-禹庙长为58.5 km河段(共19个断面)的封冻过程进行了数值模拟,并与实测资料进行比较。各断面有关的特征值如表1所示。模拟起止时刻分别为1986年11月26日上午8时至11月29日上午8时,计算总时长3 d,时步长900 s。初始条件为计算开始时刻,计算域流量、水位分布、水温分布、浮冰浓度分布、水中冰浓度分布和冰盖体厚度分布。边界条件包括上游流量过程线、下游水位过程线和给定水位 z 的法向梯度的固壁条件,流速采用不穿透条件和滑移条件,即 $(\partial z/\partial n)_{\text{固壁}}=0$, $v=0$, $(\partial u/\partial n)_{\text{固壁}}=0$,其中, n 为边界的外法线矢量。采用无滑移条件是因为在大雷诺数时,固壁边界附近的流速沿固壁的法向梯度很大,需要极小的网格尺寸来分辨当地流速的变化,由于本文计算域较大,难以采用极小的网格尺寸进行计算,因此将固壁当作滑移边界处理。

表1 河曲段控制断面特征值

Table 1 Characteristics of cross sections of Hequ reach

断面名称	距龙口 /m	边坡系数	底部高程 /m	底宽 /m	糙率系数
龙口	0	30.2	860.2	80	0.025
英战滩	2800	55.0	855.6	100	0.025
楼子营	5400	12.5	851.5	80	0.030
娘娘滩	7700	18.3	851.2	80	0.030
焦尾城	10100	66.7	849.6	200	0.030
北元	14550	31.0	847.2	120	0.025
南元	16750	66.7	846.2	280	0.025
九良滩	20000	24.0	844.5	100	0.018
水文站	24300	33.3	842.6	50	0.020
石窑卜	26500	8.2	837.2	20	0.030
船湾	30545	20.0	840.2	40	0.025
五花城	33800	20.0	841.5	280	0.020
铺路	35530	24.0	839.5	60	0.030
河会	40500	25.0	837.8	70	0.025
曲峪	43000	26.7	835.6	160	0.025
阳面	45900	15.0	835.5	220	0.030
石梯子	50355	17.1	832.5	60	0.030
火山	53604	37.5	832.2	100	0.030
禹庙	58533	40.0	828.6	120	0.025

4.2 网格划分

由于河曲段地形复杂,急弯多,且存在江心洲,因此采用贴体网格计算。江心洲将河道分成若干子河段,相邻子河段的边界由江心洲的固壁和公共水边界组成。整个计算域呈一多连通区域。采用结构型网格对接方法,对每一个子河段构造结构型网格。计算时,内部边界条件的处理由边界两侧的子河段边界网格对接实现,即子河段内

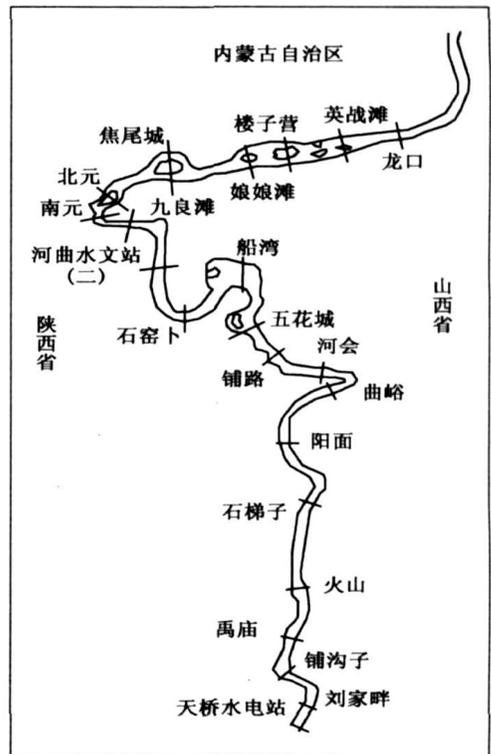


图4 观测断面位置示意图

Fig 4 Study reach of the Yellow River

部边界的虚单元由另一侧子河段的内部边界上对应的实单元代替, 该子河段虚单元的物理量的值由另一子河段实单元的物理量的值赋予。为保证江心洲与急弯处小特征尺度的局部急变流场模拟的精细性, 采用网格局部加密, 将细网格嵌入所需部位, 以取得局部的空间分辨率。这样既保证了远离江心洲区域及顺直河道大特征尺度的流动计算迅速, 又确保江心洲附近及急弯处小特征尺度的局部流场模拟的精细性。计算过程中, 局部加密网格与原始网格计算独立进行, 但两者计算方法相同。先选取需局部加密的原始网格区域, 然后按照每个原始网格分成 $(DI \times DJ)$ 个局部加密网格的方式进行划分。其中 DI 为 x 方向的网格加密系数, DJ 为 y 方向的网格加密系数, 本文选取 $DI = DJ = 4$ 。局部加密网格的迭代步数 $n_s = \max(DI, DJ)$ 。

将整个计算域分为三段, 即敞流段、推进段和封冻段, 如图5所示。求解时根据冰盖前沿推进的距离判断是否需要重新划分计算域。设沿流程方向为 x , 沿河宽方向为 y , 原点位于龙口断面右岸侧。原始贴体网格划分为 1000×20 (沿 x 为1000个网格, 沿 y 为20个网格)。网格局部加密后最大网格尺寸为80.5 m(位于 $x = 48950$ m); 最小网格尺寸为2.6 m(位于 $x = 23667$ m), 如图6、图7所示。

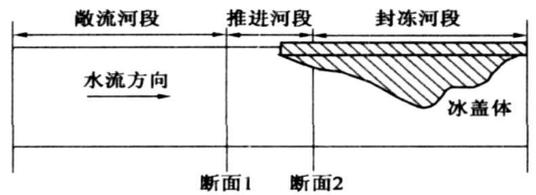


图5 计算域划分示意图

Fig 5 Sketch of computational area

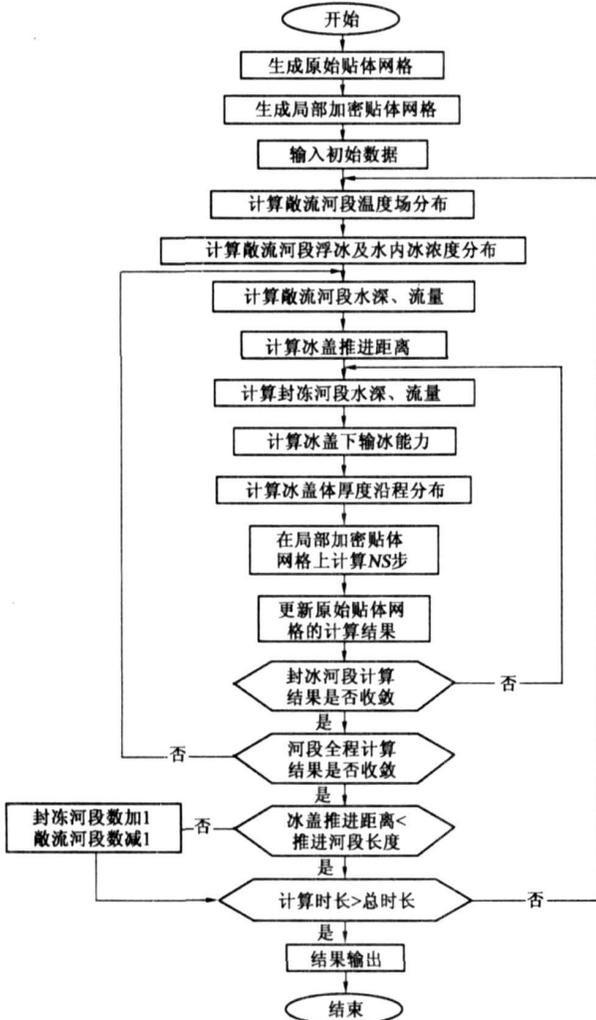


图6 计算流程图

Fig. 6 Computational flow chart

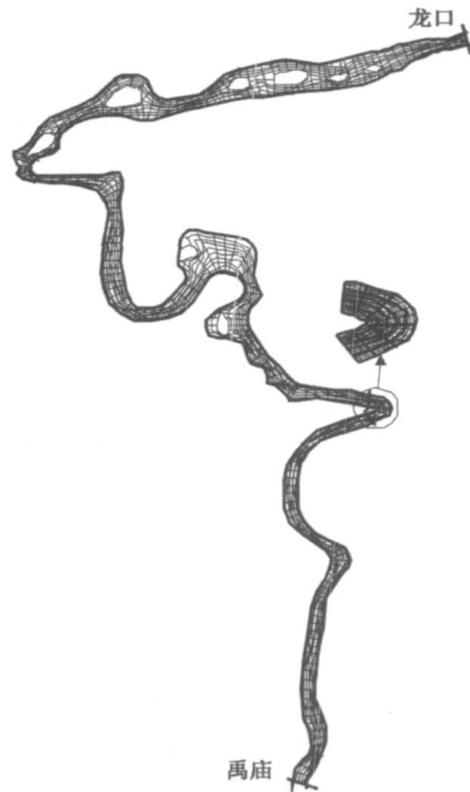


图7 计算网格图

Fig. 7 Computational grid

4.3 计算及成果分析

封河过程中沿程水位计算和实测值比较如图8所示, 显然两者吻合较好。随着冰盖向上游推进, 冰盖前沿附近的水位逐渐壅高。水位沿河宽方向的变化如图9所示。由图9(a)可见, 27日上午8时, 冰盖推进至阳面断面附近, 与26日相比水位壅高2 m; 由图9(b)可见, 28日上午8时, 冰盖推进至河会断面附近, 水位壅高2.3 m; 由图9(c)可见, 29日上午8时, 冰盖推进至龙口断面附近, 水位壅高1.2 m。

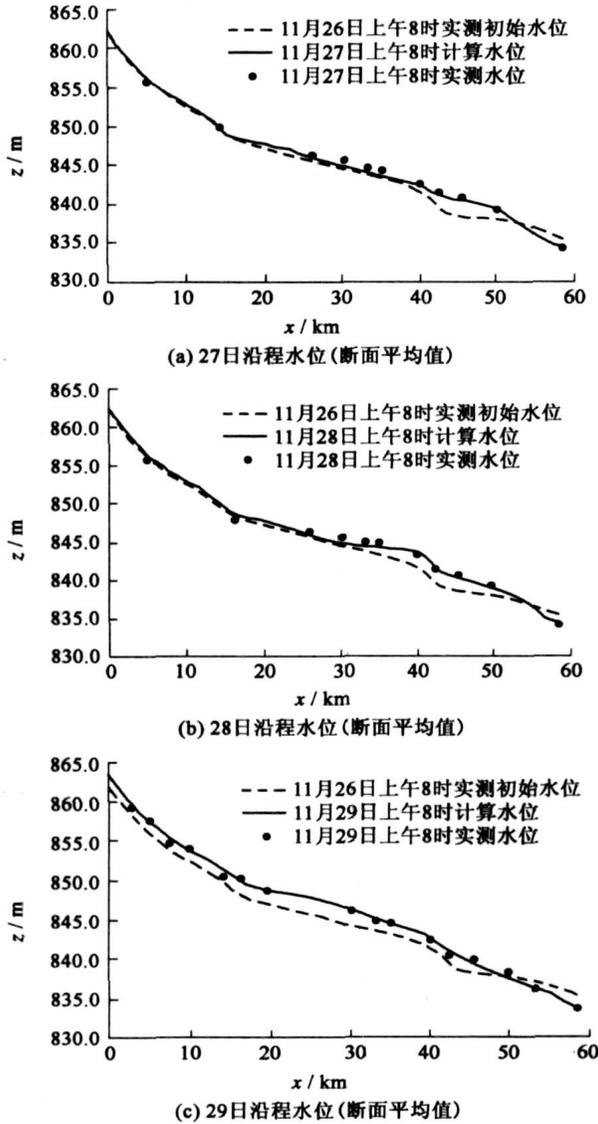


图8 沿程水位(断面平均值)

Fig. 8 Variation of water level with distance

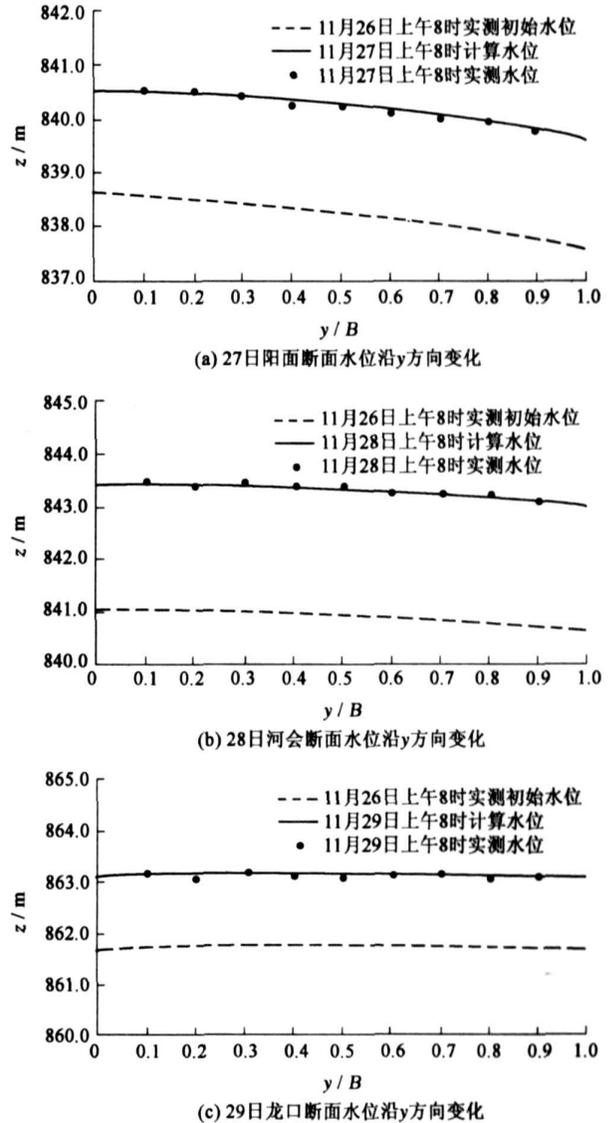


图9 断面水位沿y方向变化

Fig. 9 Variation of water level of cross section with y direction

图10、图11给出的是冰盖推进前沿位置的计算值和实测值的比较, 显然两者吻合很好。同时, 从图中可以看出, 冰盖向上游推进的速度并不相同, 27日至28日的速度最慢, 28日至29日的速度最快, 原因是冰盖向上游推进的过程中, 冰盖前沿处的冰块浓度受气温的影响较大, 当气温骤降时, 冰盖前沿的来冰量剧增, 使冰盖推进速度加快。

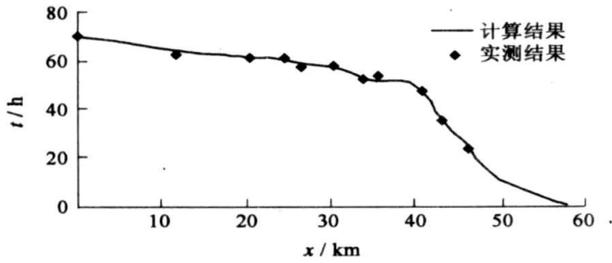


图10 冰盖前沿平均位置随时间变化

Fig. 10 Variation of averaged freezing fringe position

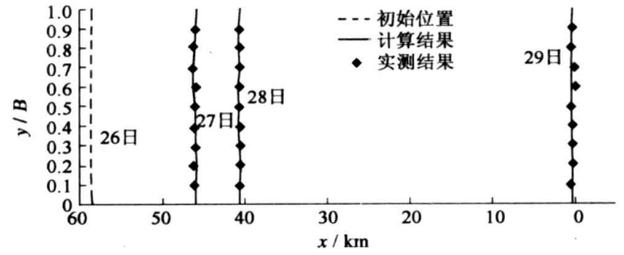


图11 冰盖前沿推进位置(上午8时)

Fig. 11 Positions of freezing fringe at 8 00 a m

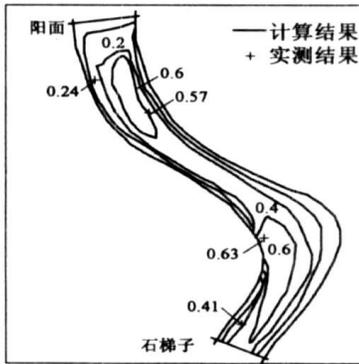


图12 27日石梯子- 阳面河段冰盖厚度分布(单位: m)

Fig. 12 Thickness of ice cover in Shitizi Yangmian reach on Nov. 27

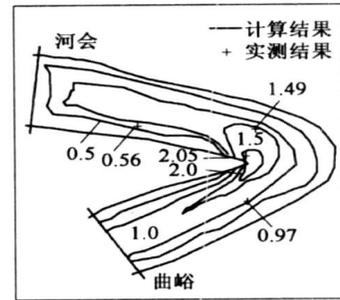


图13 28日曲峪- 河会河段冰盖厚度分布(单位: m)

Fig. 13 Thickness of ice cover in Quyu Hehui reach on Nov. 28

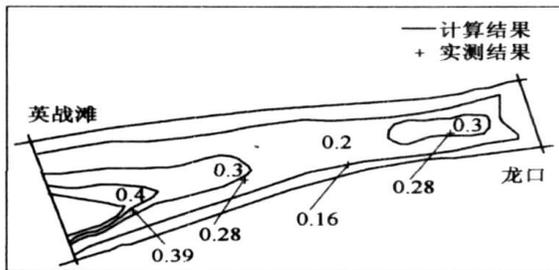


图14 29日英战滩- 龙口河段冰盖厚度分布(单位: m)

Fig. 14 Thickness of ice cover in Yingzhan Tan Longkou reach on Nov. 29

图12~图14给出的是冰盖体厚度计算与实测值的比较,显然,两者吻合较好。由图可见,冰盖在推进过程中,厚度并不相同,其原因是冰盖初始形成时,各个断面的几何特征、来冰条件和来流条件并不相同,而前沿下游河段已形成的冰盖厚度因冰盖下的输冰而变化。入弯河段至弯顶区间,冰盖体最大厚度集中在凸岸,而弯顶至出弯河段区间,冰盖体最大厚度向凹岸偏移,但总的趋势仍然是冰盖体的主体部分靠近凸岸。这是由于水流入弯时,最大流速靠近凸岸,受纵、横向流速共同作用,几乎全部的冰块折向凸岸附近而停滞并堆积在冰盖底面;水流出弯时,最大流速渐渐移向凹岸,因此,冰盖体厚度向凹岸偏移。另外,计算结果表明,冰盖推进过程中出现机械加厚方式,原因是河曲段河道断面的河宽远大于水深。

5 结 论

为了精确模拟天然河道复杂的流动边界情况,本文采用适体坐标,在一维河冰数值模型基础上,提出了适体坐标系下二维河冰数值模型,并运用 MacCormack 步进方法求解。应用黄河河曲段实测资料进行了初步验证,两者符合较好。研究表明,在河道封冻过程中,冰盖前沿的推进速度以及冰盖体厚度分布受到诸多因素影响,并且随着冰盖前沿逐步向上游推进,冰盖前沿的水位壅高也逐渐向上游推移。本文所采用的二维数值模型较好地模拟了上述特征,并且体现了水力要素及冰盖厚度等沿河宽方向的变化。

参考文献:

- [1] 茅泽育, 吴剑疆, 张 磊, 等. 天然河道冰塞演变发展的数值模拟[J]. 水科学进展, 2003, 14(6): 700– 705.
- [2] 茅泽育, 吴剑疆, 余云童. 河冰生消演变及其运动规律的研究进展[J]. 水力发电学报, 2002(1): 153– 161.
- [3] 王永填. 河冰数值模型及河渠冬季输水冰情特性研究[D]. 北京: 清华大学, 1999.
- [4] 吴剑疆. 河道中冰情形成演变机理分析及冰塞和水内冰数值模拟[D]. 北京: 清华大学, 2002.
- [5] Smith T, Ettema R. Flow resistance in ice covered alluvial channels[J]. Journal of hydraulic engineering, 123(7): 1997. 592– 599.
- [6] 茅泽育, 马吉明, 余云童, 等. 封冻河道的阻力研究[J]. 水利学报, 2002, (5): 59– 64.
- [7] 吴剑疆, 茅泽育, 王爱民, 等. 河道中水内冰演变发展的数值计算[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(5): 702– 705.
- [8] 付 辉, 伊明昆, 尹运基, 等. 冰塞水位分析[J]. 水科学进展, 2006, 17(1): 102– 107.
- [9] Ashton G D. Froude criterion for ice block stability[J]. Journal of Glaciology, 1974, 13(8): 307– 313
- [10] Pariset E, Hausser R. Fomation and evolution of ice covers on rivers[J]. Transaction of engineering institute of Canada, 1961, 5(1): 41– 49.
- [11] Lal A M W, Shen H T. A mathematical model for river ice processes[J]. Journal of hydraulic engineering, ASCE, 1991, 117(7): 903– 923.
- [12] Shen H T, Wang D S. Under cover transport and accumulation of frazil granules[J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1995, 120(2): 184– 195.
- [13] Jain S C, Ettema R. Minimization of frazil ice production by river-flow regulation[J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1989, 115(9): 1256– 1274.
- [14] Matousek V. Regularity of the freezing up of the heat exchange between water body and water surface[A]. Proceedings of IAHR Symposium On Ice[C]. Iowa: IAHK, 1986. 187– 200.
- [15] 山西省河曲县防汛抗旱指挥部. 黄河河曲冰塞观测资料汇编[R]. 河曲市: 山西省河曲市轻印刷服务中心, 1993.

2D numerical model for river-ice processes based upon body-fitted coordinate^{*}

MAO Ze-yu, XU Xin, WANG Ai-min, ZHAO Xue-feng, XIAO Han

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: To simulate accurately the complicated boundary conditions and overcome the problems caused by wide gap of scale between length and width, and change of computational boundary conditions as water level variations, a 2D river ice numerical model based upon the body-fitted method is developed by using the principles of hydrodynamics and thermodynamics and considering the influence of the frazil ice accumulating under ice cover and the shape of freezing fringe of ice cover during the river ice process. The model is capable of determining the velocity field, the distribution of water temperature, the concentration distribution of the frazil ice, transportation of the floating ice, the progression, stability and thaw of ice cover and the transportation, accumulation and erosion of ice under ice cover. MacCormack scheme is used to solve the equations. The model is validated through the field observations in Hequ reach of the Yellow river. The results show that the 2D numerical model presented is capable of simulating the river ice process with accuracy.

Key words: river ice regime; natural river; body-fitted coordinate; 2D river ice model

* The study is financially supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50579030).