

# 缓坡方程的有限元解法及应用

郑俊<sup>1</sup>, 李瑞杰<sup>1,2</sup>, 江森汇<sup>2</sup>, 罗锋<sup>1</sup>

(1. 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学物理海洋研究所, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 利用有限元方法离散椭圆型缓坡方程, 能适用于复杂区域, 并很好地拟合不规则边界; 采用改进共轭梯度法求解离散方程组, 可以大大降低计算内存要求, 提高计算效率。利用结合上述两种方法的模式对规划的日照港区水域进行了波浪数值计算, 并将计算结果与物理模型试验值进行比较, 结果表明: 该模式能适用于较大区域的波浪场计算, 并可以得到较好的计算结果。

**关键词:** 波浪; 数值计算; 缓坡方程; 有限元法

**中图分类号:** TV139.2      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-6791(2009)02-0275-06

Berkhoff<sup>[1]</sup>提出的缓坡方程考虑了波浪的折射、绕射、反射等联合效应, 对复杂地形下的波浪计算具有较满意的精度, 已被广泛运用于近岸波浪传播计算。该方程为椭圆型, 可采用有限差分方法和有限元方法对其进行离散求解。李瑞杰等<sup>[2,3]</sup>利用有限差分方法对椭圆型缓坡方程进行求解, 得到了较好的结果。有限差分方法具有形式直观、理论成熟、精度可选、易于编程、易于并行等优点, 但对不规则区域的处理较为繁琐, 且对复杂不规则边界拟合较差。有限元方法相对有限差分方法的优越性主要体现在: 能适应不规则区域, 拟合复杂不规则边界等方面。赵明等<sup>[4]</sup>、柳淑学等<sup>[5]</sup>、Bellotti 等<sup>[6]</sup>、Khellaf 等<sup>[7]</sup>利用有限元方法离散椭圆型缓坡方程对试验地形或理想地形上的波浪场进行过求解, 都得到了较理想的结果。

在波浪计算中, 一般要求每个波长内要求至少有 8 个节点, 在大区域上对椭圆型缓坡方程进行离散将得到庞大的稀疏系数矩阵。由于受计算机内存和速度的限制, 大型稀疏系数矩阵方程的求解比较困难。经验表明, 直接法(如 Gauss 消去法)只能适用 10 个波长以内的计算域<sup>[8]</sup>。迭代方法(如 Jacobi、Gauss-Seidel 和超松弛迭代法)对于稀疏系数矩阵方程只需存贮系数矩阵中的非零项, 能处理较大的范围, 但这些迭代方法要求系数矩阵对角占优或对称正定, 然而椭圆型缓坡方程的离散系数矩阵一般是非对角占优、非对称正定<sup>[8]</sup>。改进共轭梯度法<sup>[8,9]</sup>避免了对整个计算区域同时求解, 只在计算内存中保留一个向量的乘积从而降低了对内存的要求, 相对于其它大多数迭代算法能更快速地收敛, 能很好地处理多种边界条件的有限元或有限差分问题<sup>[10]</sup>。因此, 将改进共轭梯度法应用于椭圆型缓坡方程的求解, 使计算模式具有较高的计算效率, 可应用于较大的计算域。

## 1 基本方程及求解

### 1.1 控制方程及边界条件

控制方程采用椭圆型非线性缓坡方程<sup>[2,11-13]</sup>:

$$\nabla(C C_g \nabla \phi) + (k^2 C C_g + i w + i C_g) \phi - \phi = 0 \quad (1)$$

式中  $\phi$  为复波面函数;  $\nabla$  为水平梯度算子;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  为角频率,  $f_0$  由线性弥散关系  $f_0 = g k \tanh(kd)$  得到,  $C = \omega / k$  为相速度;  $C_g = \partial \omega / \partial k = nC$  为群速度,  $k$  为波数,  $n = [1 + 2kd / \sinh(kd)] / 2$ ,  $d$  为水深; 波浪破碎参数  $\beta = (1 - \omega^2 / 4a^2) / d$ ,  $a$  为常数, 取 0.15;  $\gamma$  为经验值, 取 0.4;  $a$  为波振幅; 摩擦因子

收稿日期: 2007-12-12

基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (200802940014)

作者简介: 郑俊(1982-), 男, 浙江遂昌人, 博士研究生, 主要从事港口海岸及近海工程研究。E-mail: zj5153@163.com

$$w = 4n f_r ak / \{3 [2kd + \sinh(2kd)] \sinh(kd)\}$$

式中  $f_r$  为摩阻系数, 取 0.01。

非线性弥散关系采用 Kirby 和 Dalrymple<sup>[14]</sup>提出的形式:

$$^2 = gk[1 + (ka)^2 F_1 \tanh^5(kd)] \tanh(kd + kaF_2) \tag{2}$$

式中  $F_1 = [\cosh(4kd) + 8 - 2 \tanh^2(kd)] / [8 \sinh^4(kd)]$ ,  $F_2 = [kd / \sinh(kd)]^4$ ,  $g$  为重力加速度。

在闭边界上, 采用反射边界条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \phi \tag{3}$$

式中  $K_r$  为反射系数, 全反射时取 1, 全吸收时取 0, 部分反射时取 0~1 之间。

在开边界上, 采用抛物型近似边界条件<sup>[15]</sup>:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -p\phi - q \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2} + f \tag{4}$$

式中  $f = \partial \phi_0 / \partial r + p\phi_0 + q \partial^2 \phi_0 / \partial^2$ ;  $p = (k^2 r^2 + k_0^2 r^2 + ik_0 r + 0.25) / (2ik_0 r^2)$ ;  $q = 1 / (2ik_0 r^2)$ ;  $\phi_0 = \phi_l + \phi_R$ ,  $\phi_l$  为入射波势,  $\phi_R$  为反射波势,  $k_0$  是开边界上平均水深对应的波数,  $r$ 、为极坐标。

### 1.2 有限元方程及求解

为简便起见, 将方程(1)表示为

$$\nabla (E \nabla \phi) + F\phi = 0 \tag{5}$$

式中  $E = CC_g$ ,  $F = k^2 CC_g + iw + iC_g - \dots$ 。

将计算区域划分为有限个单元, 采用 Galerkin 有限元方法建立积分方程:

$$- \left[ \begin{matrix} C \\ C \end{matrix} + \right] N_i \left[ E \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds + \iint E \nabla \phi \nabla N_i d + \iint F \nabla \phi \nabla N_i d = 0 \tag{6}$$

式中  $N_i(x, y)$  为线性插值函数;  $C$ 、分布为岸边界及开边界。

假设式(6)中的系数  $E$ 、 $F$  在每个网格单元内是线性变化的, 得到线性方程组

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \tag{7}$$

方程组(7)进一步转化为

$$[A^*][A]\{\phi\} = [A^*]\{f\} \tag{8}$$

式中  $[A^*]$  为  $[A]$  的共轭转置矩阵,  $[A^*][A]$  为 Hermit 正定系数矩阵。

对式(8)进行迭代求解, 收敛判定准则为

$$\frac{[A]\{\phi_i\} - \{f\}}{\{\phi_i\}^2} < \tag{9}$$

式中 为指定残差, 下标  $i$  表示第  $i$  次迭代。

## 2 模型应用及分析

对于规划的日照港区, 李瑞杰等<sup>[16]</sup>曾对透空式防波堤的水沙和波浪做过系统研究。本文对孙精石等<sup>[17]</sup>文中的规划日照港区进行了波浪数值计算。计算区域如图 1 所示, 东边界为开边界, 南、北水边界为侧边界, 其它边界均为固体边界。试验波要素参见表 1, 以表 1 的波浪要素作为外海 - 13 m 等深线处的入射条件。采用北京 54 坐标系统, 以理论最低潮面为基准面, 极端高水位为 +5.82 m, 航道设计底高程 - 23 m, 航道边坡为 1 7。

表 1 试验波要素<sup>[16]</sup>

Table 1 Wave elements of the test

方向	重现期/a	水位	波高 $H_{13\%}/m$	平均周期 $\bar{T}/s$
E	50	极端高	5.36	8.9
ESE	50	极端高	4.99	8.9
SE	50	极端高	4.51	8.4

计算网格采用三角形网格。在航道内满足每个波长内有 10 个网格节点,在航道边坡附近进行加密,其余区域内满足每个波长内有 8 个网格节点。

### 2.1 模型验证及分析

3 种波况下南堤、北堤前沿波高验证情况如图 2 所示,图中横轴  $L$  表示试验测点至防波堤南端的距离,试验测点布置于南堤、北堤外侧前沿,在图 1 中用“·”表示。由图 2 可看出:

E 向浪对南堤、SE 向浪对北堤外侧前沿(均为背浪侧)的波高计算值与试验值吻合较好。

E 向浪对北堤、SE 向浪对南堤外侧前沿(均为迎浪侧)的波高计算值存在一定的“抖动”现象,峰值与试验值基本吻合,谷值与试验值有一定偏差。

下面试分析造成计算值与试验值存在偏差的原因:

在迎浪侧(E 向浪时航道北侧、SE 向浪时航道南侧)存在多条平行于航道的波高峰值线与波高谷值线(图 3,图 4),波高在垂直航道方向上出现“抖动”,进而迎浪侧防波堤(E 向浪时北堤、SE 向浪时南堤)外侧前沿的波高计算值也表现出“抖动”(图 2)。赵志帮等<sup>[18]</sup>,陈汉宝等<sup>[19]</sup>的计算结果也表明,当波浪斜向入射时,航道迎浪侧附近存在波高峰值线与波高谷值线的现象。航道边坡的水深分布梯度较大,导致数值计算时航道边坡处相邻节点上的水深差异较大。而本文模式未能考虑水深的梯度变化,故不能较好地适用于剧变地形情况,这可能是造成航道迎浪侧的计算值存在“抖动”的原因。为减小这种水深差异过大带来的影响,对航道边坡附近的网格进行加密,得到的计算值“抖动”程度比未加密时明显减小。基于该模式未考虑水深的梯度变化,不能通过加密网格来完全消除水深不连续带来的“抖动”现象。孙精石等<sup>[17]</sup>指出:南堤、北堤堤头为直立沉箱结构,堤身段为斜坡式结构,在极端高水位 50a 重现期 E、SE 向浪时,迎浪侧堤头附近存在严重越浪,堤身亦存在不同程度的越浪及爬高现象。本文模式的闭边界只能取为全反射或部分反射,未能考虑越浪及波浪爬高等因素,也可能使得计算值与试验值存在一定偏差。

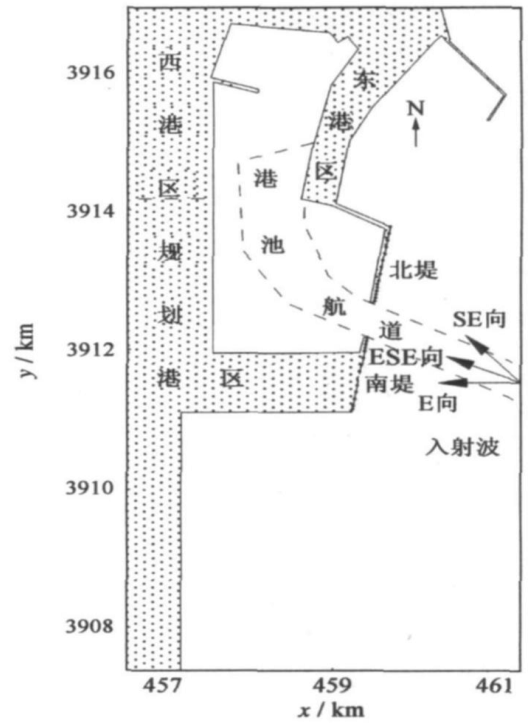


图 1 计算区域

Fig. 1 Region of calculation

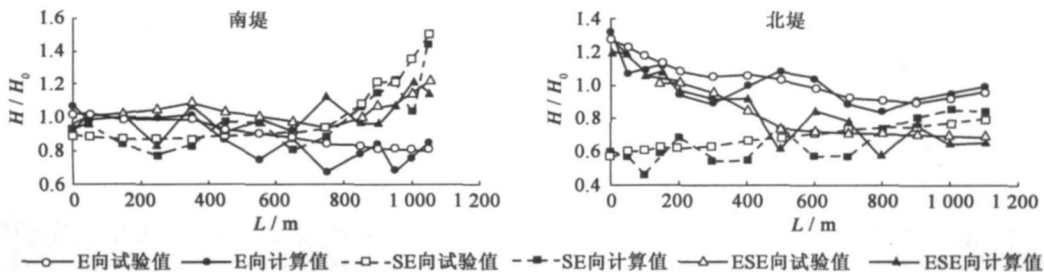


图 2 3 种波况下南、北堤前比波高计算值与试验值对比

Fig. 2 Comparison of calculated relative wave height and experimental results along the south and north jetty under three wave conditions

ESE 向浪时波浪传播方向几乎平行于航道。航道内大部分波能被折射出航道,并在航道两侧与入射波能汇聚形成大波高带,对称分布于航道两侧,表现出波高峰值线与波高谷值线现象(图 5)。在南堤、北堤外侧前沿的波高最大值并非出现在堤头处,而是向堤身方向偏移。该现象可能是数值计算时航道对波浪的折射作用偏大造成的。对于堤身段外侧前沿计算值出现的“抖动”现象,可能是本文模式未能考虑水深的梯度变化、越浪及

波浪爬高等因素引起的。

## 2.2 港区波况分析

由图3~图5可看出, 航道两侧边坡的波浪因水深差异被折射出航道, 与航道外的入射波相叠加, 波能发生聚集, 形成比波高大于1.0的波浪聚集区; 航道对波浪的折射作用随波浪入射角的变化而不同, 港池内波能的传入情况亦随波浪入射角的变化而不同。

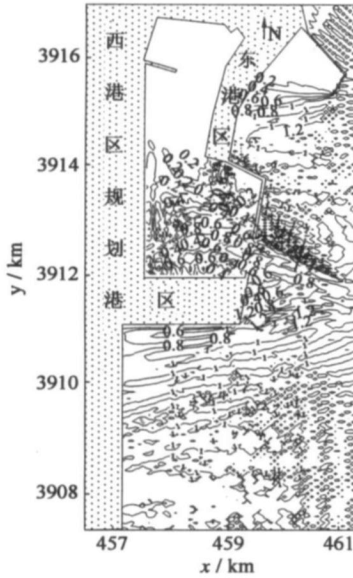


图3 E向浪比波高分布

Fig. 3 Distribution of relative wave height under east wave

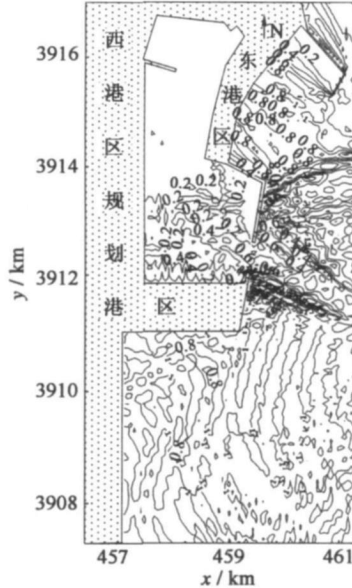


图4 SE向浪比波高分布

Fig. 4 Distribution of relative wave height under southeast wave

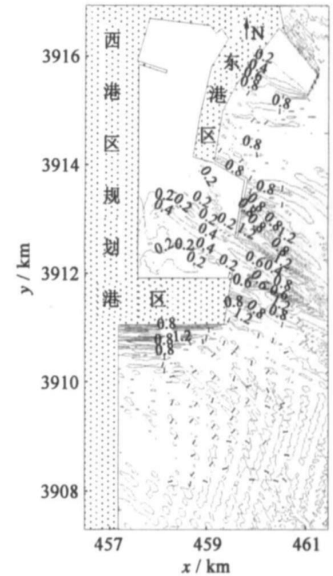


图5 ESE向浪比波高分布

Fig. 5 Distribution of relative wave height under east southeast wave

E向浪时计算区域内比波高分布如图3所示。航道北侧的波能聚集现象较南侧明显, 北侧波高峰值线平行于航道, 南侧波高峰值线明显偏离航道, 在防波堤前沿处已偏离至南堤南端。从开边界处直接进入航道的波能部分被折射出航道, 从航道北侧斜向入射的波能大部分被航道边坡折射回去, 少部分穿越航道到达航道南侧。通过口门进入港池的波能大致可分为两部分: 一部分波能直接传播至口门正对的西作业区, 经岸线反射传播至北堤后侧码头; 另一部分波能因折射、绕射作用传播出航道, 与西作业区的反射波能在港内口门水域叠加。港池内侧主要受由口门进入的绕射波与港池岸线的反射波相互作用。

SE向浪时计算区域内比波高分布如图4所示。口门外航道两侧的波浪折射情况大致与E向浪时相反, 通过口门进入港区的波能情况类似于E向浪时。直接传播至西作业区的波能往港内侧偏移, 形成的反射波能除传至北堤后侧码头外, 还能传至东港区泊位水域。

ESE向浪时计算区域比波高分布如图5所示。口门外航道两侧的波高分布情况大致对称。航道内波能基本是开边界处直接进入的, 传播至口门处已大部分被折射出航道, 进入港池的波能明显比E向浪和SE向浪时少。

## 3 结 论

利用有限元方法离散椭圆型缓坡方程, 相对于有限差分方法, 该方法具有适应不规则区域, 方便加密局部网格, 较好地拟合复杂不规则边界等优势。采用改进共轭梯度法求解由椭圆型缓坡方程离散得到的大型稀疏系数矩阵方程, 相对于其它迭代方法具有快速、绝对收敛等特点。运用该计算方法对规划的日照港区水域进行了波浪数值计算, 并与物理模型试验值进行了比较。计算结果表明, 该模式能应用于较大范围的近海区域, 能得

到较好的计算结果,但模型本身未能考虑水深的梯度变化、越浪、波浪爬高等因素,对于越浪情况及剧变地形情况下的计算结果不太理想。

### 参考文献:

- [1] BERKHOFF J C W. Computation of combined refraction-diffraction[C]// Proc 13th International Coastal Engineering Conference. Vancouver: ASCE, 1972, 1: 741 - 790.
- [2] 李瑞杰, 王爱群, 王厚杰. 波浪在浅水传播中的弱非线性效应[J]. 海洋工程, 2000, 18(3): 30 - 38. (LI Rui-jie, WANG Ai-qun, WANG Hou-jie. Weakly non-linear effect of wave propagation in shallow water[J]. Ocean Engineering, 2000, 18(3): 30 - 33. (in Chinese))
- [3] 李瑞杰, 魏守林, 于凤香. 考虑振幅弥散影响的波浪变形模型[J]. 水动力学研究与进展, 2002, 17(6): 676 - 683. (LI Rui-jie, WEI Shou-lin, YU Feng-xiang. Wave propagation model with the consideration of amplitude dispersion[J]. Journal of Hydrodynamics, 2002, 17(6): 676 - 683. (in Chinese))
- [4] 赵明, 滕斌. 椭圆型缓坡方程的一个有效的有限元解[J]. 海洋学报, 2002, 24(1): 117 - 123. (ZHAO Ming, TENG Bin. An efficient finite element solver for the elliptic mild-slope equation[J]. Acta Oceanologica Sinica, 2002, 24(1): 117 - 123. (in Chinese))
- [5] 柳淑学, 孙冰. 考虑边界波浪方向的缓坡方程自适应求解模型[J]. 海洋工程, 2007, 25(1): 35 - 42. (LIU Shu-xue, SUN Bing. Self-adaptive FEM numerical modeling of mild slope equation with total absorption[J]. The Ocean Engineering, 2007, 25(1): 35 - 42. (in Chinese))
- [6] BELLOTTI G, GIAN M B, PAOLO D G. Internal generation of waves in 2D fully elliptic mild-slope equation FEM models[J]. Coastal Engineering, 2003, 49(1 - 2): 71 - 81.
- [7] KHELLAF M C, BOUHAEF M. Modified mild slope equation and open boundary conditions [J]. Ocean Engineering, 2004, 31(13): 1713 - 1723.
- [8] PANCHANG V G, PEARCE B R, GE W, et al. Solution to the mild-slope wave problem by iteration [J]. Applied Ocean Research, 1991, 13(4): 187 - 199.
- [9] LI B. A generalized conjugate gradient model for the mild slope equation [J]. Coastal Engineering, 1994, 23(3 - 4): 215 - 225.
- [10] PANCHANG V G, DEMIRBILEK Z. Simulation of waves in harbors using two-dimensional elliptic equation models[J]. Advances in Coastal and Ocean Engg, 2001, 7: 125 - 162.
- [11] DALRYMPLE R A, KIRBY J T, HWANG P A. Wave diffraction due to areas of high energy dissipation[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1984, 110(1): 67 - 79.
- [12] ZHAO Liu-zhi, PANCHANG V G, CHEN W, et al. Simulation of wave breaking effects in two-dimensional elliptic harbor wave models[J]. Coastal Engineering, 2001, 42(4): 359 - 373.
- [13] 张扬, 李瑞杰, 郑金海. 波浪的非线性频散关系[J]. 水科学进展, 2004, 15(4): 448 - 453. (ZHANG Yang, LI Rui-jie, ZHENG Jir-hai. Nonlinear dispersion relations of wave[J]. Advances in Water Science, 2004, 15(4): 448 - 453. (in Chinese))
- [14] KIRBY J T, DALRYMPLE R A. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models[J]. Coastal Engineering, 1986, 9(6): 545 - 561.
- [15] XU B, PANCHANG V G, DEMIRBILEK Z. Exterior reflections in elliptic harbor wave models[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1996, 122(3): 118 - 126.
- [16] 李瑞杰, 邵宇阳, 舒颢俊, 等. 日照港透空式防波堤可行性研究[R]. 南京: 河海大学物理海洋研究所, 2006. (LI Rui-jie, SHAO Yu-yang, SHU Xiao-jun, et al. The research of practicability of permeable breakwater in Rizhao harbor[R]. Nanjing: Institute of Physical Oceanography of Hohai University, 2006. (in Chinese))
- [17] 孙精石, 郑宝友, 陈汉宝, 等. 日照港石臼港区防波堤工程波浪整体物理模型试验研究报告[R]. 天津: 交通部天津水运工程科学研究所, 2007. (SUN Jing-shi, ZHEN Bao-you, CHEN Han-bao, et al. The report of physical model research of current and wave for breakwater project in harbor region of Shijiu, Rizhao[R]. Tianjin: Tianjin Research Institute for Water Transport Engineering, Ministry of Communications, 2007. (in Chinese))
- [18] 赵智帮, 刘子琪, 孙精石, 等. 深水航道对波浪传播影响规律的研究[J]. 中国港湾建设, 2001, 115(6): 9 - 15. (ZHAO Zhi-bang, LIU Zi-qi, SUN Jing-shi, et al. Influence pattern of deep water channels upon wave propagation[J]. China Harbour Engineering, 2001, 115(6): 9 - 15. (in Chinese))

- [19] 陈汉宝, 刘海源. 航道对多方向波传播影响[J]. 海洋工程, 2005, 23(4):27-32. (CHEN Han-bao, LIU Hai-yuan. Effects of the channel on multi-direction wave transmission[J]. The Ocean Engineering, 2005, 23(4):27-32. (in Chinese))

## Finite element solution for mild-slope equation and its application

ZHENG Jun<sup>1</sup>, LI Rui-jie<sup>1,2</sup>, JIANG Sen-hui<sup>2</sup>, LUO Feng<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Coastal Disaster and Defence, Ministry of Education, Nanjing 210098, China;

2. Institute of Physical Oceanography, Hohai university, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** The finite element method, which suits complex domain shapes well and fits the irregular boundary conveniently, is used to solve the elliptic mild slope equation in the model of this paper. And the modified conjugate-gradient method, which solves the linear system of equations efficiently and requires less memory, is used to solve the linear system of the mild slope equation. This model is tested with the laboratory measurements of Rizhao Port waters. The results show that the model could be used in relative large region and get ideal results.

**Key words:** water wave; numeric calculation; mild slope equation; finite element

---

## 中国将实行最严格的水资源管理制度

水利部部长陈雷 2 月 14 日在全国水资源工作会议上表示, 中国将实行最严格的水资源管理制度, 建立健全流域与区域相结合、城市与农村相统筹、开发利用与节约保护相协调的水资源管理体制, 划定水资源管理的“三道红线”, 以应对严峻的水资源形势, 保障经济社会全面协调可持续发展。

当前中国人多水少, 水资源时空分布不均、与生产力布局不相匹配的基本水情并未改变。同时, 在全球气候变化和大规模经济开发双重因素的交织作用下, 中国水资源情势正在发生新的变化。目前全国年缺水量达 400 亿 m<sup>3</sup>, 近 2/3 的城市存在不同程度的缺水, 农村饮水不安全人口仍有 2 亿多, 农业每年因旱成灾面积达 2.3 亿亩, 特别是当前北方冬麦主产区旱情持续发展, 造成部分群众饮水困难。

“我国水资源面临的严峻形势要求我们, 必须统筹考虑经济社会发展与水资源节约、水环境治理、水生态保护, 实行最严格的水资源管理制度, 推动经济社会发展与水资源承载能力、水环境承载能力相互协调。”陈雷说。

在当前水资源短缺和污染的严峻形势下, 要把水资源管理的重心放在合理配置、全面节约和有效保护上, 以总量控制与定额管理、水功能区管理等制度建设为平台, 通过水资源论证、取水许可、水资源费征收、入河排污口管理、水工程规划审批等手段, 强化需水管理, 推进节水防污型社会建设, 着力提高水资源利用效率和效益。到 2020 年, 要初步形成与全面建设小康社会相适应的现代化水资源管理体系。

实行最严格的水资源管理制度, 就是要不断完善并全面贯彻落实水资源管理的各项法律、法规和政策, 划定水资源管理“红线”, 严格执法监督。当前, 要围绕水资源的配置、节约和保护, 明确水资源开发利用“红线”, 严格实行用水总量控制; 明确水功能区限制纳污“红线”, 严格控制入河排污总量; 明确用水效率控制“红线”, 坚决遏制用水浪费。

摘自水利部网站