

水库调洪演算的随机数学模型

姜树海

(南京水利科学研究院水工研究所 南京 210029)

提要 以介于微分方程和概率论之间的边缘数学分支随机微分方程的数学模型,对水库调洪过程中的随机现象和规律进行数学描述和分析,试图全面正确地综合各种不确定性因素对库水位随机过程的影响。根据水库蓄洪量具有 Wiener 过程特性的分析,推导了带有随机输入项和随机初始条件的调洪演算 Ito 方程。在此基础上,运用 Fokker-Planck 向前方程,求介了调洪过程库水位的概率密度分布。计算成果表明,运用随机微分方程进行水库的调洪演算,有利于正确分析水库调洪的随机过程和进一步开展水库泄洪风险分析。

关键词 水库调洪演算 随机微分方程 泄洪风险分析

1 前言

水库调洪演算的任务,就是根据拟定的设计洪水过程线、泄洪建筑物的泄流能力曲线及水位库容关系曲线等基本资料,按确定的防洪调度规则,采用适当的计算方法,求出库水位和下泄流量的变化过程线。显然,在调洪过程中,存在着许多难以预料和控制的不确定性因素。如,入库洪水过程的不确定性、出库泄洪能力过程的不确定性、水位库容关系的不确定性和防洪起调限制水位等调度规则的不确定性。正是这些流动运行条件不确定性的影响,导致了库水位和下泄流量过程的随机性。但是,传统的调洪演算方法不能考虑过程的随机性,从而使设计者难以准确评估泄洪建筑物设计规模和防洪调度规则的合理性,难以进行水库泄洪风险的分析。

如何对实际调洪过程更加精确的描述,这就要考虑各种随机因素的影响。对调洪过程的分析也应从通常的确定性观点转化到随机性观点,调洪演算的方法也就要从确定性常微分方程进化到随机微分方程的方法。

随机微分方程的研究对象是随机过程,研究方法既要用到概率论方法,又要用到通常的微分方程方法。运用这一方法,可以对包含着水文、水力等随机输入过程和随机初始条件的调洪全过程中的随机现象和规律进行数学描述和分析,为开展水库泄洪风险分析创造条件。

2 调洪过程随机特性的分析

在整个调洪过程中,由于入库洪水的水文条件、出库泄洪的水力条件、水位库容关系的边界条件和起调水位的初始条件等的不确定性,导致了不同时刻水库蓄洪量 $W(t)$ 的随机变

化,这一变化又制约着库水位 $H(t)$ 的随机消长。无疑地,采用随机过程的概念来研究 $W(t)$, 有利于把 $H(t)$ 的随机变化过程完整全面地描述出来。

很明显,调洪过程中 $W(t)$ 的变化可用 Markov 过程来模拟。这是因为任意时刻的 $W(t_n)$, 在其所有过去观测值 $W(t_{n-1}), W(t_{n-2}) \cdots W(t_1)$ 已知的条件下,其条件概率只与最近的过去值有关,而不依赖于水库再早时的蓄洪量值,即有

$$f(W_n, t_n | W_{n-1}, W_{n-2} \cdots W_1; t_{n-1}, t_{n-2} \cdots t_1) = f(W_n, t_n | W_{n-1}, t_{n-1}) \quad (1)$$

其中 $f(W_n, t_n | W_{n-1}, t_{n-1})$ 为条件转移密度函数。

同时, $W(t)$ 的随机过程还是一独立增量过程,即认定:在整个调洪过程中,任意时间间隔 Δt 的蓄洪量增量 $\Delta W(t)$ 是相互独立的。

随机输入的影响因素众多,其综合作用的结果必然是 $W(t)$ 围绕其均值过程线 $\mu_w(t)$ 作随机游走,其概率密度分布 $f(W, t)$ 可服从正态分布:

$$f(W, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\{-[W - \mu_w(t)]^2 / 2\sigma^2 t\} \quad (2)$$

上述分析表明,水库的蓄洪量 $W(t)$ 是符合 Wiener 过程定义的^[1]。在扣除了 $W(t)$ 的均值偏移 $\mu(t)$ 后,就存在一无偏的 $B(t)$ 变化过程。其均值 $E[B(t)] = 0$, 方差 $D[B(t)] = \sigma^2 t$ 。由此,可得

$$W(t) = \mu_w(t) + B(t) \quad (3)$$

一般而言,洪水的输入、输出随机过程和库容的边界随机过程决定着 $W(t)$ 的 Wiener 过程特性。本文以我国汉江安康水电站^{①②}为例,具体分析这几方面随机因素的作用。

2.1 入库洪水的随机过程 $Q(t)$

入库洪水过程是工程设计依据的基本资料。由于水文资料的收集和整理、设计洪水过程线推求方法等多种因素的影响,导致了入库洪水必然是一连续的随机过程。

安康水电站大坝按 $T_r = 300a$ 一遇洪水标准设计, $Q_{max} = 35700m^3/s$; 按 $T_r = 5000a$ 一遇校核, $Q_{max} = 47000m^3/s$ 。按放大典型洪水过程线方法分别给出的设计和校核洪水过程线,即为这两个系统状态下随机过程的均值线 $\mu_Q(t)$ 。图 1 中给出了安康水库的 $\mu_Q(t)$ 过程线。在过程的任一时刻,假设 $Q(t)$ 的概率密度符合正态分布,其标准差 $\sigma_Q(t)$ 可根据水文计算的实际情况确定。

2.2 出库泄量的随机过程 $q(H, C)$

在泄洪建筑物规模确定的情况下,受库水位 H 和流量系数等水力参数 C 的不确定性影响,出库泄量 q 亦可表达为一随机过程。文献^[2]较为详尽地分析了 C 的随机影响,但因未能考虑 H 的随机过程特性及其对 q 的相关性,致使不能准确、可靠地进行 q 的随机分析。

安康水电站泄洪建筑物设计终结方案为:坝顶表孔 $n_1 = 5$ 孔,每孔宽 $b_1 = 15m$,堰顶高

① 水电四局石泉分局。汉江安康水电站初步设计报告。1972

② 水电四局石泉分局。汉江安康水电站设计中有关水库泥沙的几个问题。1976

程 $z_1 = -7\text{m}$ (水库防洪起调水位为 0m)，坝内中孔 $n_2 = 5$ 孔，每孔面积 $a_2 \times b_2 = 11 \times 12\text{m}^2$ ，底孔高程 $z_2 = -15\text{m}$ ，坝内底孔 $n_3 = 4$ 孔， $a_3 \times b_3 = 5 \times 8\text{m}^2$ ， $z_3 = -55\text{m}$ ，机组引用流量 $\mu_{q4} = 1000\text{m}^3/\text{s}$ 。各类孔的流量系数 m_1 、 μ_2 和 μ_3 分别根据试验资料拟合确定。由此，可求得 $\mu_q(H, C)$

$$\begin{aligned} \mu_q &= \mu_{q1} + \mu_{q2} + \mu_{q3} + \mu_{q4} \\ &= m_1 n_1 b_1 \sqrt{2g} (\mu_H - z_1)^{1.5} + \mu_2 n_2 a_2 b_2 \sqrt{2g} (\mu_H - z_2) \\ &\quad + \mu_3 n_3 a_3 b_3 \sqrt{2g} (\mu_H - z_3) + \mu_{q4} \end{aligned} \quad (4)$$

图 1 中还给出了安康水库终结方案下的 μ_q 。

式(4)中 μ_H 随 t 变化，所以只有 C 独立影响 q 的随机变化。通常， C 的离散度相对较小，因此 q 的独立随机变化亦相对较小。根据 C 的概率分布特性，即可推算确定 $\sigma_q(H, C)$ 。

2.3 水位库容的随机过程 $w(h)$

现场量测和绘图计算的误差、库岸坍塌和泥沙淤积等自然因素，都会引起水位库容关系 $w = w(h)$ 的不确定性，这也是一个随机过程。

通过实际测量，可给出安康水库的均值 $w(h)$ 经验关系式。一般认为， $w(h)$ 的均值线 $\mu_w(h)$ 与原设计给定的 $w \sim h$ 曲线一致。假设任一 h 上的概率密度符合正态分布，其 $\sigma_w(h)$ 的大小可依量测计算精度和可能的库岸坍塌、泥沙淤积情况而定。

以上几方面随机因素的综合作用，决定了调洪过程中 $W(t)$ 的 Wiener 过程特性。其中， $W(t)$ 的均值 $\mu_w(t)$ 可写作

$$\mu_w(t) = \int_{t_0}^t [\mu_q(t) - \mu_q(H, C)] dt \quad (5)$$

式中 t_0 为起调的初始时刻。 $W(t)$ 的方差 $\sigma^2 t$ 取决于整个过程的离散程度，亦即取决于 $Q(t)$ 、 $q(H, C)$ 和 $w(h)$ 自身的变异性。通过实际调查和资料分析，可给出若干不同时刻的 $\sigma_q(t_i)$ 、 $\sigma_q(t_i)$ 和 $\sigma_w(t_i)$ 值。据多个随机过程联合分布的概念及对 $W(t)$ 量纲分析的结果，可得

$$\sigma^2 t_i = [\sigma_q^2(t_i) + \sigma_q^2(t_i)] \Delta t^2 + \sigma_w^2(t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

取 σ^2 的均值，作为 $W(t)$ 过程的强度。

以安康水库的调洪过程为例：若取变异系数 $\delta_q(t) = \delta_q(t)/\mu_q(t) = 0.1$ ， $\delta_q(t) = 0.01$ 和 $\delta_w(h) = 0.02$ ，以 $t = 42\text{h}$ 最大设计洪峰流量出现时刻作为 σ 的计算依据。据(6)式求得 $\sigma = 145\ 000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ ，若仅考虑 Q 、 q 两项的作用，则 $\sigma = 33\ 000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ ，仅考虑 w 一项， $\sigma = 140\ 000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ 。

3 调洪过程随机微分方程的求解

传统的确定性调洪演算方法，不能考虑变量的随机特性，只能在均值过程线意义上考察调洪全过程。因此，对 $W(t)$ 过程的均值 $\mu_w(t)$ 表达式(5)微分，即可导出传统的调洪演算方程式

$$\frac{d\mu_w(t)}{dt} = \mu_q(t) - \mu_q(H, C) \quad (7)$$

式(7)表达了一个简单的水量平衡关系。令 $G(\mu_H) = d\mu_w/d\mu_H$, 并加入初始条件, 则有

$$\begin{cases} \frac{d\mu_H(t)}{dt} = [\mu_q(t) - \mu_q(H, C)]/G(\mu_H) \\ \mu_H(t_0) = h_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\mu_H(t)$ 为均值的库水位过程, h_0 为 t_0 时刻的初始库水位。

式(8)中诸函数均为确定性变量。不确定性因素的影响和随机过程的概念无法反映, 计算求解的也只能是确定性的 $\mu_H(t)$ 。因此, 必须建立包含有随机元素的随机微分方程, 以考察调洪全过程。从前述水库蓄洪量 $W(t)$ 的随机过程特性分析出发, 对其 Wiener 过程表达式(3)微分, 并除以 $G(H)$

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = [\mu_q(t) - \mu_q(H, C)]/G(H) + \frac{dB(t)}{dt}/G(H) \\ H(t_0) = H_0 \end{cases} \quad (9)$$

其中 $dB(t)/dt$ 是一正态白噪声。

从形式上看, 式(9)仅比前述的确定性微分方程式(7)增加了一项 $\frac{dB(t)}{dt}/G(H)$ 。但增加了这一项, 则表示引入了随机输入因素。于是, $H(t)$ 不再是普通的确定性函数, 而是随机过程了。式(9)可简化为典型的 Ito 方程形式

$$\begin{cases} dH(t) = \varphi(t, H(t))dt + g(t, H(t))dB(t) \\ H(t_0) = H_0 \end{cases} \quad (10)$$

对于式(10)这样带有随机作用项的 Ito 方程, 其均方解只能通过 Ito 随机积分的方法求得, 而不能以通常意义的均方积分求解。其解过程的矩, 可通过一定的计算公式较简单地确定。

Ito 方程的解过程是 Markov 过程^[3]。对于 Markov 过程, 最重要的概念是转移概率分布。就考察水库的调洪过程而言, 人们关注的是不同时刻库水位的概率分布状况, 因为它在很大程度上决定了调洪过程中库水位的发展变化进程。

解过程 $H(t)$ 的一阶概率密度函数 $f(h, t)$ 应能满足过程的动力学方程^[3], 即

$$\frac{\partial f(h, t)}{\partial t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} [\alpha_n(h, t)f(h, t)] = 0 \quad (11)$$

其中 α_n 为随机过程 $H(t)$ 的导出矩, 可表示为

$$\alpha_n(h, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[H(t+\Delta t) - H(t)]^n | H(t) = h\} \quad (12)$$

式(11)与扩散方程形式一致, 是一概率守恒方程。其初始条件和边界条件可分别写作

$$\begin{cases} f(h, t_0) = f_0(h) \\ f(\pm\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

这一边界条件表明, $H(t)$ 的转移概率密度必须满足归一化条件, 即

$$\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f(h, t_i | h_0, t_0) dh = 1 \quad t_0 \leq t_i < t_n \quad (14)$$

对 Markov 过程, 式(11)中的 $n \geq 3$ 时, $\alpha_n(h, t) = 0$ 。这时, 式(11)就演化为 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial f(h,t|h_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial h} [a_1(h,t)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} [a_2(h,t)f] \quad (15)$$

根据 Wiener 过程的性质, 可求得

$$\begin{aligned} E\{\Delta B(t)\} &= 0 \\ E\{\Delta B(t)\Delta B(t)\} &= 2\sigma^2 \Delta t \end{aligned} \quad (16)$$

由此, 在对 Ito 方程式(10)的情况下, 可求得式(15)的简化运用表达式(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial f(h,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial h} [f(h,t)\varphi(t,H)] + \frac{\partial}{\partial h^2} [f(h,t)g(t,H)^2\sigma^2] \\ f(h,t_0) = f_0(h) \end{cases} \quad (17)$$

式(17)是一确定性的偏微分方程, 可采用有限差分的数值计算方法求解。在求解过程中, 同步计算了各个时刻的 $f(h,t)$ 和相应的 $\mu_q(t)$ 。这一 μ_q 值是根据 $f(h,t)$ 确定的, 即

$$\mu_q(t) = \int_{h_{min}}^{h_{max}} q(h,C)f(h,t)dh \quad (18)$$

这样求得的均值泄量 μ_q 更为合理、准确。图 1 显示了式(18)与传统调洪方法计算结果的比较。

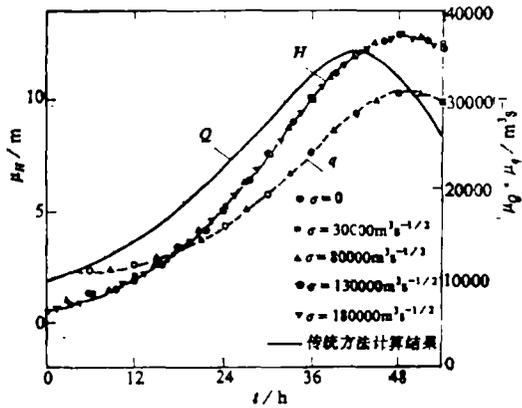


图 1 $\mu_Q, \mu_q, \mu_H \sim t$ 关系曲线
Fig. 1. Relationship between μ_Q, μ_q, μ_H and t

4 计算成果分析

根据前述安康水电站的实际水文、工程条件和运行调度规则, 采用本文建议的随机微分方程方法, 进行调洪演算, 以确定不同时刻的 $H(t)$ 概率密度分布 $f(h,t)$ 及其统计特征值 $\mu_H(t), \sigma_H(t)$ 。

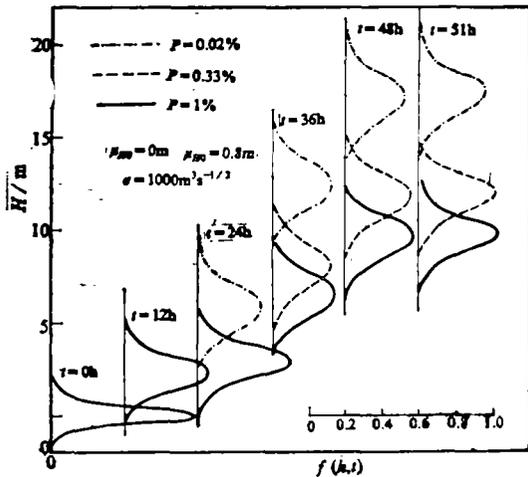


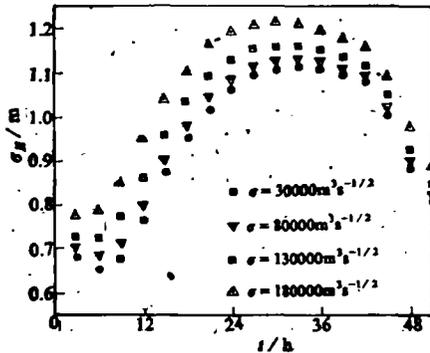
图 2 $f(h,t)$ 分布图

Fig. 2. Probability distribution profiles of $f(h,t)$ 计算结果的比较, 亦显示在图 1 中。该图可见,

图 2 给出了在泄洪建筑物终结设计方案条件下, 不同洪水重现期 ($P=1\%$ 、 0.33% 和 0.02%) 的 $H(t)$ 过程概率密度分布 $f(h,t)$ 。显然, 随着过程的进展, 不同时刻的库水位不再是一定值, 而是具有某种分布的随机变量。 $f(h,t)$ 的变化趋势和特征, 决定着调洪过程库水位变化的进程。这样, 随机概念就显现在了调洪过程分析中。

根据 $f(h,t)$ 的分布函数, 可以求出相应时刻库水位的 $\mu_H(t)$ 和 $\sigma_H(t)$ 值。由 $f(h,t)$ 确定的设计洪水条件下的 $\mu_H(t)$, 与传统方法式(8)计算结果的比较, 亦显示在图 1 中。该图可见,

两种方法对 $\mu_H(t)$ 过程的模拟结果没有太大的差异,说明与传统计算方法完全不同的随机微分方程的数学模型,也能提供 $\mu_H(t)$ 的可信资料。此外,传统方法无法反映的库水位过程离散程度的信息(即 $\sigma_H(t)$ 值),随机微分方程的方法则可以提供。图3给出了设计洪水条件下不同时刻的 $\sigma_H(t)$ 值。随着过程的发展, $\sigma_H(t)$ 并不是单调增大的。算例中,在达到最大 $\mu_H(t)$ 的前瞬,即 $\mu_H(t)$ 足够大时, $\sigma_H(t)$ 可出现减小的趋势。在一定的泄洪建筑物规模下, H 和 q 相互联系,又相互制约,存在着一过程平衡的关系。正是这一关系,导致 q 足够大时, $H(t)$ 离散性的减小。

图3 $\sigma_H \sim t$ 关系曲线Fig. 3. Relationship between σ_H and t

在本算例中,还分析比较了随机作用强度 σ^2 和随机初始条件 H_0 对 $H(t)$ 的影响。取 $\sigma = 0, 30\,000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}, 80\,000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}, 130\,000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ 和 $180\,000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ 五种情况,研究 σ^2 对 $\mu_H(t)$ 和 $\sigma_H(t)$ 的影响。同时,还比较了三种 H_0 分布下的 $H(t)$: 两种正态分布 $\mu_{H_0} = 0, \sigma_{H_0} = 0.8\text{m}$ 和 0.6m , 一种离散型的一点分布,即

$$f(t_0) = \delta(h - h_0) \quad (19)$$

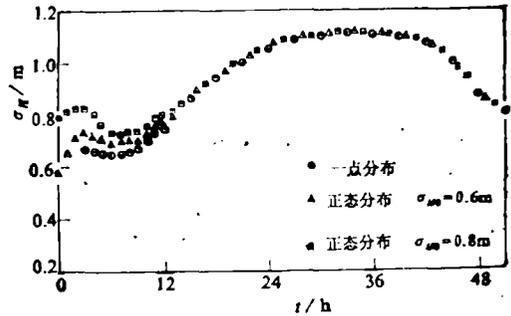
当 $h = h_0$ 时, $\delta(h - h_0) = 1$; 当 $h \neq h_0$ 时, $\delta(h - h_0) = 0$ 。 h_0 为初始起调水位,取作 0 。

随机作用的离散程度 σ , 似对 $\mu_H(t)$ 无太大影响(见图1), 而对 $\sigma_H(t)$ 却影响显著; σ 越大, 则 $\sigma_H(t)$ 亦越大(见图3)。这反映了随机输入和输出的相关关系, 输入的离散性 σ 越大, 则输出的离散性 $\sigma_H(t)$ 亦越大。图4给出了不同初始条件下, $\sigma_H(t)$ 的变化过程线。显然, H_0 对其以后过程的 $\sigma_H(t)$ 有着一定影响。但随着过程的发展, 这一初值影响将逐渐减小, 以致可以忽略。但是, 在调洪历时较短。洪峰陡峻情况下, H_0 对库水位分布的影响则必须引起设计者的重视。

在不同的来流洪水重现期条件下, $H(t)$ 的概率分布及其特征值是不相同的。由图2的资料分析可见, 在 $\mu_{H_0} = 0, \sigma_{H_0} = 0.8\text{m}$ 和 $\sigma = 1\,000\text{m}^3\text{s}^{-1/2}$ 情况下, 按设计洪水 ($P = 0.33\%$) 进行调洪演算, $q_{\max} = 29\,900\text{m}^3/\text{s}$, $\mu_{H\max} = 11.8\text{m}$, $\sigma_{H\max} = 0.945\text{m}$ 。这时, 对于水库的泄洪能力而言, 是足够安全的。而按校核洪水 ($P = 0.02\%$) 计算时, $q_{\max} = 38\,600\text{m}^3/\text{s}$, $\mu_{H\max} = 17.26\text{m}$, $\sigma_{H\max} = 1.07\text{m}$ 。这时, 虽然均值库水位 μ_H 未超过水库的警戒水位 $z_0 = 18\text{m}$, 尚有近 0.74m 的安全富裕。但根据随机分布的概念, $H(t)$ 具有一定的离散性, 仍存在着 $H > z_0$ 的可能性。由图2可见, 在校核洪水条件下, 洪水漫越警戒水位 z_0 的概率

$$P_1(H > z_0) = F(H > z_0) \quad (20)$$

仍可达到33%左右。

图4 H_0 对 σ_H 的影响Fig. 4. Influence of H_0 on σ_H

以上算例表明, 运用随机微分方程的数学模型, 进行泄洪建筑物设计方案和调洪方案的比较, 将有利于开展水库的泄洪风险分析, 有利于优化防洪工程设计。

5 结 论

(1) 在水库的调洪过程中, 存在着许多难以预料和控制的不确定性因素。如: 入库洪水过程、出库泄量过程、水位库容关系等。本文在考察这些随机过程的基础上, 分析和论证了水库蓄洪量的 Wiener 过程特性。

(2) 本文推导的带有随机作用项和随机初始条件的调洪演算 Ito 方程是合理的。运用 Fokker-Planck 方程求解库水位过程概率密度的计算方法, 具有较广泛的适用性。

(3) 运用随机微分方程的数学模型, 对水库调洪过程中的随机现象和规律, 进行数学描述和分析, 能够全面、正确地反映各种不确定性因素对库水位过程的随机影响, 从而为水库泄洪风险分析创造了条件。

参 考 文 献

- 1 陆大纶。随机过程及其应用。北京: 清华大学出版社, 1986。537~541
- 2 徐祖信, 郭子中。开敞式溢洪道泄洪风险计算。水利学报。1989, (4):50~54
- 3 张炳根, 赵玉芝。科学与工程中的随机微分方程。北京: 海洋出版社, 1980。251~278

A Stochastic Mathematic Model for Reservoir Flood Routing

Jiang Shuhai

(Nanjing Hydraulic Research Institute)

Abstract: A mathematic model of the stochastic differential equation (SDE) is applied to describe and analyze the random phenomena and their laws in the reservoir flood regulation procedures. According to the analysis of a Wiener process characteristics of the reservoir storage, an Ito Equation with a stochastic input term and a stochastic initial condition for reservoir flood routing is derived. And, by using the Fokker-Planck Equation, the probability density distributions of reservoir level hydrograph in the flood regulation procedure are solved. The calculated results show that the mathematic model of SDE in reservoir routing is favourable in understanding the laws of the stochastic flood regulation procedure and developing risk analysis for flood relief.

Key words: reservoir flood routing; stochastic differential equation; risk analysis for flood relief.