第6卷 第1期
1995年3月

水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE

Vol. 6, No. 1
Mar., 1995

无结构网格上二维浅水流动的数值模拟

胡四一　　谭维炎

（水利部南京水文水资源研究所　南京 210024）

提　要　提出在无结构网格上建立有限体积高性能格式族的统一框架，通过引入跨单元界面法向数值通量的逆风分解，将一维 Osher、TVD 两种通量分裂格式自然地推广至二维浅水方程组。给出了各种情况下浅水方程组有限体积法边界处理的计算公式。最后，利用该格式对穹包溢流、陆地动边界和河口潮流三个问题进行计算。结果表明，这类守恒格式具有高精度、无振荡性以及处理复杂流态过渡、自动捕俘间断和模拟陆地动边界的功能。

关键词　无结构网格　二维浅水方程组　有限体积高性能格式

分类号　TV 133.2

1 引　　言

在二维浅水流动计算中，常遇到如何处理曲边界形状以及计算域内有堤防、公路、铁路等其它天然分界这类问题。采用任意三角形或多边形网格剖分是非常合适的，既可克服矩形网格锯齿形边界所造成的流动失真，也可避免生成有结构贴体曲线网格的复杂计算和其它困难。

本文提出一种在结构网格上建立有限体积高性能格式族的统一框架，从而将一维 Osher 格式、TVD 格式、两种通量分裂格式自然地推广至二维浅水方程组。为使算法精确有效，能够自动处理涌波和水跃这类强间断现象，算法的核心是在无结构三角形或四边形单元中引入逆风概念，从而进行跨单元界面法向数值通量的逆风分解。此外，还在浅水动力学范围内对该格式族应用中遇到的值得注意的若干问题，诸如边界处理，动陆地边界等，加以讨论。最后，给出了三个算例的数值结果，说明格式所具有的良好性能。

2 二维浅水方程组

二维不恒定浅水方程组的守恒形式为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F(W)}{\partial x}+\frac{\partial G(W)}{\partial y}=D(W) \tag{1}$$

其中守恒物理向量 W、x－向和 y－向通量向量 F 和 G，以及源项向量 D 分别为

本文于1993年8月20日收到，1993年12月20日收到修改稿。

$$W=\begin{bmatrix}h\\hu\\hv\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}hu\\hu^2+gh^2/2\\huv\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}hv\\huv\\hv^2+gh^2/2\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\\gh(S_0^x-S_f^x)\\gh(S_0^y-S_f^y)\end{bmatrix}\tag{2}$$

式中 h 为水深；u 和 v 分别是 x 和 y 方向的垂线平均流速；g 为重力加速度；S_0^x 和 S_0^y 分别为 x 和 y 方向水底底坡；S_f^x，S_f^y 分别为 x 和 y 方向摩阻底坡。

3 有限体积离散

为了适应复杂几何形状流场的数值计算，采用任意三角形或四边形网格剖分和网格中心格式，即将流动变量定义在单元形心，且控制体与单元本身重合。记 Ω_i 为单元域，$\partial\Omega_i$ 为其边界。利用格林公式，可得方程组（1）的有限体积近似

$$A_i\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t}\oint_{\partial\Omega_i}(F\cos\varphi+G\sin\varphi)\mathrm{d}l=A_i\overline{D}_i\tag{3}$$

式中 A_i 为单元 Ω_i 的面积；$(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ 为 $\partial\Omega_i$ 的外法向单位向量；$\mathrm{d}l$ 为线积分微元；$\overline{D}_i$ 为非齐次项在单元 Ω_i 上的某种平均。若记 $F_n=F\cos\varphi+G\sin\varphi$ 为跨单元界面的法向数值通量，时间积分采用显向前格式，那么（3）式为

$$A_i\frac{W_i^{n+1}-W_i^n}{\Delta t}+\sum_j F_{nj}l_j=A_i\overline{D}_i\tag{4}$$

式中求和号下的指标 j 相应于单元 i 的第 j 边，l_j 为边长。算法的核心是如何计算法向数值通量 F_n。

4 法向数值通量

为使格式具有高精度、稳定性以及有效地处理水跃、涌波这类强间断流动的功能，通量的逆风分解是法向数值通量计算的关键。近年来，在计算空气动力学一维数值计算中已提出了多种方法，主要有通量分裂法（FVS），通量差分裂法（FDS），Osher 分裂法以及 TVD 格式。下面结合二维浅水方程组的具体形式，系统地导出无结构网格上法向数值通量 F_n 的公式。

4.1 法向通量分裂

对于给定单元的某一边，首先通过旋转变换将法向通量 F_n 变换到局部笛卡儿座标系 $\bar{x}-\bar{y}$ 下，$\bar{x}$ 正向与该边外法向相同，有

$$H(q)=T(F\cos\varphi+G\sin\varphi)=\begin{bmatrix}hU\\hU^2+gh^2/2\\hUV\end{bmatrix}\tag{5}$$

式中变换守恒向量 $q=(h,\ hU,\ hV)^{\mathrm{T}}$，而旋转矩阵 T 定义为

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{6}$$

U 和 V 分别是沿单元界面的法向和切向流速分量

$$\begin{aligned} U &= u\cos\varphi + v\sin\varphi \\ V &= -u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{aligned} \tag{7}$$

4.1.1 通量向量分裂（FVS）

沿边界法向按一维方式将变换法向通量 H 分解为前向通量 H^+ 和后向通量 H^-：

$$H(q) = H^+(q) + H^-(q) \tag{8}$$

定义局部法向佛汝德数 $F_{r_n}=U/c$，其中 $c=\sqrt{gh}$ 为浅水重力波速。对于缓流 $|F_{r_n}|<1$，有 WB 分裂和 VL 分裂（详见文献［3～5］）分别如下：

$$H^{\pm}_{WB}(q)=\frac{h}{4}\begin{bmatrix}2\lambda_2^{\pm}+\lambda_1^{\pm}+\lambda_3^{\pm}\\ 2\lambda_2^{\pm}U+\lambda_1^{\pm}(U+c)+\lambda_3^{\pm}(U-c)\\ (2\lambda_2^{\pm}+\lambda_1^{\pm}+\lambda_3^{\pm})V\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $H(q)$ 的雅可比阵的特征值

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = U+c,\lambda_2=U,\lambda_3=U-c \\ &\lambda_i^+ = \max(\lambda_i,0),\lambda_i^- = \min(\lambda_i,0) \end{aligned} \tag{10}$$

和

$$H^{\pm}_{VL}(q)=\begin{bmatrix}f_1^{\pm}=\pm hc(F_{r_n}\pm 1)^2/4\\ f_1^{\pm}(U\pm 2c)/2\\ f_1^{\pm}V\end{bmatrix} \tag{11}$$

对于急流，当 $F_{r_n}\geqslant 1$ 时，有 $H^+(q)=H(q)$，$H^-(q)=0$；反之，当 $F_{r_n}\leqslant -1$ 时，则有 $H^+(q)=0$，$H^-(q)=H(q)$。

根据变换守恒向量 q 的逆风偏心内插值 $q^{\pm}$，由（10）－（13）式可得变换法向数值通量 H 的逆风分解，然后对其作逆旋转变换 T^{-1}，就得到在原笛卡儿座标系 $x-y$ 下的法向数值通量的逆风分解

$$F_n = F\cos\varphi + G\sin\varphi = T^{-1}[H^+(q^-)+H^-(q^+)] \tag{12}$$

4.1.2 通量差分裂（FDS）

Roe 提出的通量差分裂的出发点是求解局部黎曼问题，并对通量差按特征值进行分解。直接利用通量差分裂的一维结果[6]，跨单元界面的变换法向数值通量 H 可分解为

$$H(q)=\frac{1}{2}[H(q^-)+H(q^+)-\sum_{k=1}^{3}|\tilde{\lambda}_k|\cdot\tilde{\alpha}_k\cdot\tilde{R}_k] \tag{13}$$

式中通量 H 的雅可比阵的特征值 $\tilde{\lambda}_k(q)$、特征强度 $\tilde{\alpha}_k(q)$ 和特征向量 $\tilde{R}_k(q)$ 分别为

$$\tilde{\lambda}_1=\tilde{U}+\tilde{c}\qquad \tilde{\lambda}_2=\tilde{U}\qquad \tilde{\lambda}_3=\tilde{U}-\tilde{c}$$

$$\tilde{\alpha}_1=\frac{1}{2\tilde{c}}[(hU)^+-(hU)^-\tilde{\lambda}_3(h^+-h^-)]$$

$$\tilde{\alpha}_2=(hV)^+-(hV)^--\tilde{V}(h^+-h^-)$$

$$\tilde{\alpha}_3=(h^+-h^-)-\tilde{\alpha}_1$$

$$\widetilde{R}=(\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2,\widetilde{R}_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ \widetilde{U}+\tilde{c} & 0 & \widetilde{U}-\tilde{c}\\ \widetilde{V} & 1 & \widetilde{V}\end{bmatrix} \tag{14}$$

在上述公式中，“～”表示变量取 Roe 区间平均或算术平均[6]。对（13）式中 H 作逆旋转变换 $F_n=T^{-1}H$，代入 $q^{\pm}$ 便可得到法向数值通量的通量差分裂。由于通量差分裂格式与 TVD 格式的等价性[6]，这样得到的有限体积 FDS 格式就是有限体积 TVD 格式。

关于 Osher 格式，详见文献［1］，此处不再赘述。

4.2 变换守恒变量 q 的逆风偏心内插

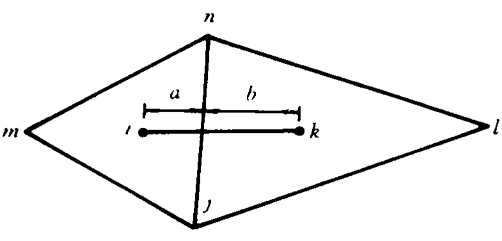

图 1 单元节点

Fig. 1. Nodes of cellss

关于变量 q^+ 和 q^- 的选择，主要取决于格式所要求的空间精度，即流动变量在单元内的分布。现以三角形单元 i 第 jn 边为例，其相邻单元为 k（见图 1）。对于一阶格式，假定流动变量 q 在单元内呈常数分布，q^- 和 q^+ 可简单地取 q_i 和 q_k。对于二阶格式，常采用 MUSCL 途径，假定流动变量 q 在单元内呈线性分布，$q^{\pm}$ 的取值通过跨三角形 i 和 k 的公共边 j 的逆风偏心内插求得。对于 q^-，内插公式为

$$q^-=q_i+[(1-\beta)\Delta^-+(1+\beta)\Delta^+]/4 \tag{15}$$

式中 $\Delta^+=q_k-q_i$，$\Delta^-=q_i-q_m$。由此可见，q^- 的计算还涉及 q 在节点 m 的取值 q_m，可由环绕节点 m 的三角形单元的流动变量按面积加权平均确定。q^+ 的逆风偏心内插可利用 q_i，q_k 和 q_l 相仿确定。为避免水深变化较大带来的内插误差，先采用水位内插，再减去界面中点处的水底高程，即为界面左、右两侧的水深 h^- 和 h^+。(15) 式中参数 β 给予 Δ^- 和 Δ^+ 不同的权重，构成了格式族。显而易见，对于有结构网格，$\beta=-1$ 为单侧逆风格式，$\beta=0$ 为 Fromm 格式，$\beta=1$ 为中心格式，而 $\beta=1/3$ 则为三阶精度格式（仅在一维情况下严格成立）[7]。

为相邻网格尺寸变化较大时，关于 Δ^+ 的公式可修正如下：

$$\Delta^+=\frac{2a}{a+b}(q_k-q_i) \tag{16}$$

式中 a 和 b 分别为三角形单元 i 和 k 的形心到该边中点的距离（见图 1）。该公式反映了对内插公式中的流动变量给予不同的权重。例如，将上式代入（17）式，并令 $\beta=1$，有

$$q^-=[b/(a+b)]q_i+[a/(a+b)]q_k \tag{17}$$

显然，若 $b>a$，在计算 q^- 时上式给予 q_i 较之 q_k 更大的权重。

此外，为了消除计算过程中在强间断邻近可能出现的数值振荡，需要进行通量限制，通常是对 q^- 和 q^+ 的逆风偏心内插加上坡度限制。已有多种坡度限制公式，本文采用连续可微的坡度限制内插公式[7]

$$q^-=q_i+s[(1-s\beta)\Delta^-+(1+\beta s)\Delta^+]/4 \qquad 18)$$

式中 s 为坡度限制因子，其公式为

$$s=(2\Delta^-\Delta^++\varepsilon)/(\Delta^-\Delta^-+\Delta^+\Delta^++\varepsilon) \tag{19}$$

其中 ε 为一很小的正数，以防止在均匀流动区（$\Delta^{\pm}=0$）上式分母为零。

由于法向数值通量沿单元边一般呈强非线性分布，需采用三点高斯数值积分来计算沿单元各边的平均法向数值通量[2]。

5　边界和底坡项处理

5.1　边界条件及处理

有限体积法的边界处理如下：首先根据局部流态（缓或急流）选择法向输出特征的相容关系，并利用给定的物理边界条件和边界内侧的已知流动状态 q_L，联解确定边界外侧的未知流动状态 q_R；然后与内部单元计算完全相同地确定跨外部边界的法向数值通量。有关公式总结见表1（推导略）。

表1　浅水方程组有限体积法边界处理

Table 1.　Treatments of boundary conditions for FVM

类型	出流开边界		入流开边界		固壁
流态	缓流	急流	缓流	急流	缓、急流
特征值符号	$\lambda_1(q_L)<0$ $\lambda_2(q_L)>0$ $\lambda_3(q_L)>0$	$\lambda_1(q_L)>0$ $\lambda_2(q_L)>0$ $\lambda_3(q_L)>0$	$\lambda_1(q_L)<0$ $\lambda_2(q_L)<0$ $\lambda_3(q_L)>0$	$\lambda_1(q_L)<0$ $\lambda_2(q_L)<0$ $\lambda_3(q_L)<0$	
相容关系	$U_R+2c_R=U_L+2c_L$ $V_R=V_L$	$q_R=q_L$	$U_R+2c_R=U_L+2C_L$		$\frac{1}{2}gh_L^2+h_L\|U_L\|U_L$ $=\frac{1}{2}gh_R^2+h_R\|U_R\|U_R$ $V_R=0,\ U_R=0$
个数	2	3	1	0	3
边界条件类型	水位 Z_R 或单宽流量 $(hU)_R$ 或水位一流量关系		除与缓出流相同外，还需附加 $V_R=V_L$ 或 $V_R=0$	必须给定 q_R 三个分量或相关信息	
个数	1	0	2	3	0

值得提及的是，当局部弗劳德数较大时，浅水方程组的静水压力假设在固壁处不再成立，故应采用考虑法向动量平衡的动水压力公式（见表1最后一栏）。此外，表1中缓流开边界相容关系是忽略非齐次项 S_o 和 S_f 的结果，如需计及这种影响，需增加非齐次项沿特征线的积分项。

此外，给定超出表中给出的必需的精确物理边界条件以取代某个相容关系，也是可行的。我们的数值试验结果证实了这一点。

5.2　陆地动边界

当计算域中存在随洪水或潮流涨落变化的陆地动边界时，假设在有水区域之外的干床区

域存在一个极薄的水层，这就将一个动边界问题变为固定边界问题来处理。虽然这一处理早已见诸于文献，但应强调指出，正是由于本文所述格式具有的无振荡性可保证数值解在小水深（可取一很小的数值，如 1 或 0.1cm）情况下不会出现负水深而导致计算失稳。

6 算例的结果与讨论

本文给出了两个模型问题和一个实际算例的计算结果。水流通过穹包（Bump）的稳定流动问题有精确解析解，可用来检验算法捕俘激波和处理伴有水跃的复杂过渡流态的功能。动边界算例用于检验动边界算法数值模拟陆地动边界的有效性。而长江口南支潮流计算说明该算法应用于工程问题的实际效果。

此外，基础穹包溢流和潮流计算两个算例，我们还对法向数值通量公式和坡度内插参数 β 的选择的效果进行了比较。结果表明，对于一阶格式，不同的法向数值通量公式对结果有较明显的影响；通量差分裂（或 TVD）与 Osher 分裂精度相当，均高于通量分裂法，而后者则以 VL 公式略优于 WB 公式；对于二阶格式，其精度显著高于一阶格式，不同的法向数值通量公式对结果的影响甚小，精度主要由内插机制控制。在穹包溢流算例中，当 $\beta=-1$ 时（单侧逆风内插），数值解非常稳定，无数值振荡；当 $\beta=1$ 时（中心内插），数值解在急流区出现较小的数值波动，在 3000 时间步后仍未完全消除，其精度较之 $\beta=-1$ 时略差一些；当 $\beta=1/3$ 时（三阶精度），其精度与二阶逆风内插相似，数值解无振荡。鉴此，对于上述三个算例仅给出二阶 TVD，且 $\beta=1/3$ 时的结果。

6.1 穹包溢流

河道中水流通过穹包的稳定流动可用于描述复杂的流态组合。当上游来流呈缓流，它遇到穹包时水位降低，在穹包顶部水流为临界流；如果下游为急流，则经过穹包的流动从缓流向急流过渡时，水面线是连续的；如果下游水流为缓流，则在穹包下游出口断面之间必出现水跃，即经过穹包的流动经历了从缓流到急流，再通过水跃回到缓流的过程。

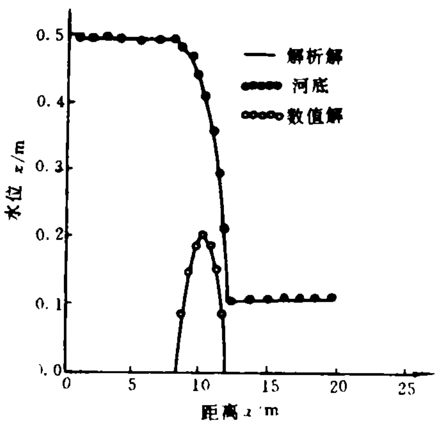

图 2　无水跃过渡（无摩阻）

Fig. 2.　Transcritical flow without water jump and friction

考虑单宽流量为 Q 的水流在宽矩形断面的河道上通过河底高程沿河分布为 $S(x)$ 的某一穹包。忽略摩阻项后，据明渠恒定流方程有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=\frac{gh^3}{Q^2-gh^3}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \tag{20}$$

上式积分可得水深 h 的解析解

$$h^3+\left[S(x)-S(x_0)-h_0-\frac{Q^2}{2gh_0^2}\right]\cdot h^2+\frac{Q^2}{2g}=0 \tag{21}$$

式中　x_0 是任一参照点，h_0 为相应于 x_0 的水深。

图 2 给出了矩形河道中（200×1 网格）水流通过穹包无水跃过渡的水位沿程分布。由图 2 可见，该格式清晰地重现了流场内的流态过渡(缓→急),与解析相比较，吻合甚好。图 3 给出了有水跃过渡的水位沿程分布。所

产生的水跃符合共轭水深关系，由于忽略了摩阻项，下游水跃位置不稳定且随时间向下游推进。在考虑底摩阻（$n=0.03$）后，就得到了水跃位置正确、物理图象逼真的稳定水跃（图4）。上述结果很好地说明了本文提出的格式在处理复杂流态过渡问题和自动捕俘间断方面是成功的。

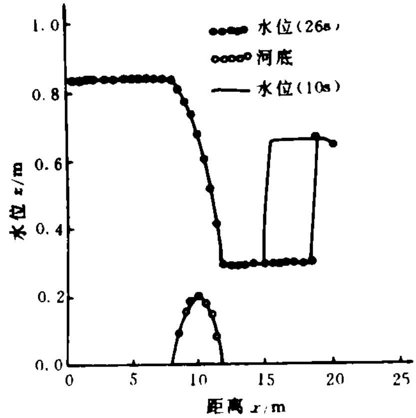

图 3　有水跃过渡（无摩阻）

Fig. 3.　Transcritical flow with water jump and without friction

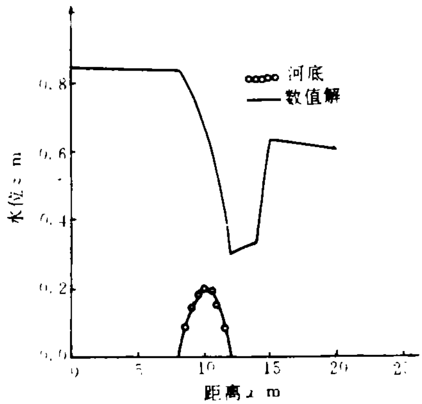

图 4　有水跃过渡（有摩阻）

Fig. 4.　Transcritical flow with water jump and friction

6.2 陆地动边界

为检验动边界算法，我们引入了一个简化的模型算例，定性地描述海岸位置随潮汐涨落的变化。

假设具有变底坡的矩形海域，其上游（左端）海岸位置受下游（右端）潮汐涨落的影响。初始条件假定为静水水面。计算中忽略风应力和地转力。计算区域由 50 个矩形单元组成。给定下游边界条件为潮位过程（见图 5）。模拟时间步长为 3s。曼宁糙率系数取 0.025。不同时间的潮位沿程分布见图 6 和图 7。

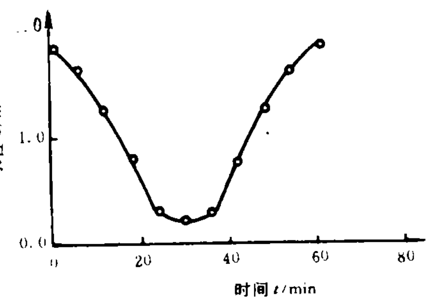

图 5　下边界潮位过程

Fig. 5.　Tidal level at downstream boundary

由图可见，落潮随着下游水位的降低，上游海岸位置逐渐右移，露出水底干床，随后在涨潮过程中，上游河道中水位又逐渐回升到初始水面。计算结果反映了该算法具有良好的模拟边界变动时空变化的功能。

6.3 长江口南支潮流流场

采用二阶 TVD（$\beta=1/3$）算法，对长江口南支河段的潮流流场进行了计算。计算上、下边界分别取在新建闸和横沙。计算区域长 76.5km，江面最大宽度 16.5km。以 1984 年 8 月 28 日 11 时至 29 日 11 时实测潮位过程（最大潮差 3.68m）作为上、下边界的边界条件。该例曾用一阶有限体积 Osher 格式和其它格式计算过[1,2]。计算网格由 151 个三角形单元和 100 节点组成（图 8）。计算时段 Δt 取 30s。河段中部石洞口水位站实测与计算水位对比（图 8）表明：

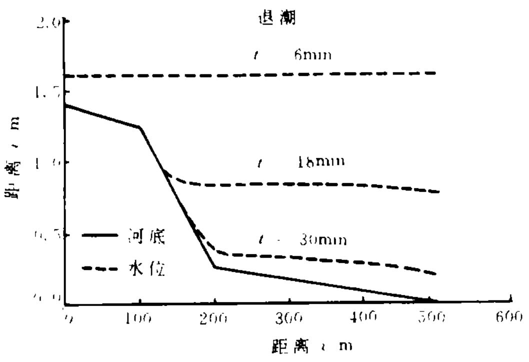

图 6 潮位沿程分布（退潮）

Fig. 6. Tidal level profiles along x (Ebb)

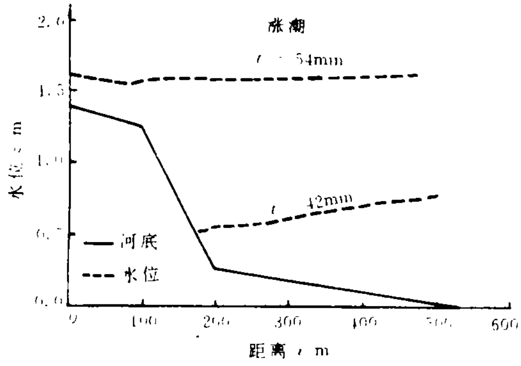

图 7 潮位沿程分布（涨潮）

Fig. 7. Tidal level profiles along x (flood)

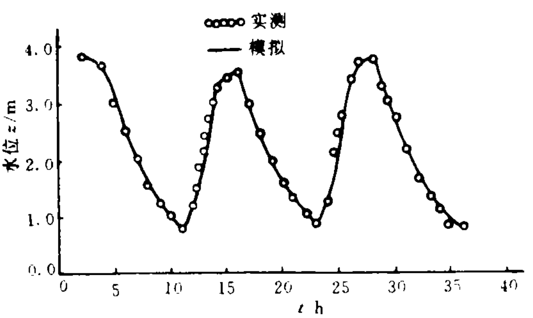

图 8 石洞口站实测与计算水位比较

Fig. 8. Comparison of observed and computed tidal levels

涨落潮的最高、最低潮位、波形和相位均吻合甚好。除在涨潮期中涨率最大的两个小时计算水位偏低外(最大达 29cm)，其它时间水位误差一般在 4cm 左右，最大不超过 8cm。计算水位线和实测水位线的最大相位差约为 12min。图 9 和图 10 给出了在落急和涨急潮时计算的流场分布图，图中左下角为下边界水位过程及相应时刻的水位。由此可见，流速分布的总体趋势是合理的。

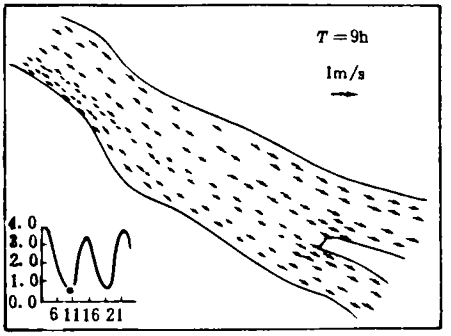

图 9 落急流场分布

Fig. 9. Computed velocityf ield (ebb)

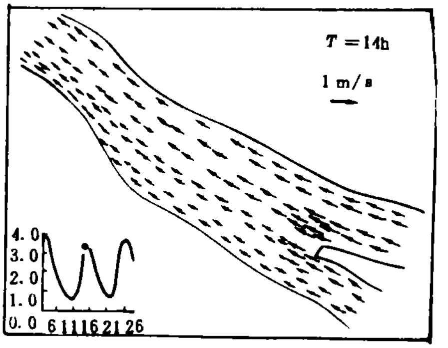

图 10 涨急流场分布

Fig. 10. Computed velocity field (flood)

参 考 文 献

1 谭维炎，胡四一．二维浅水流动的一种普适的高性能格式．水科学进展．1991，2（3）：154～161

2 谭维炎，胡四一．二维浅水明流的一种二阶高性能格式．水科学进展．1992，3（2）：89～95

3 谭维炎，胡四一．浅水流动的可压缩流数学模拟．水科学进展．1992，3（1）：16～24

4 Steger J L and Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite — difference methods. Journal of Computational Physics. 1981, 40: 263～293

5 Van—Leer B. Flux—vector splitting for the Euler equation. Lecture Notes in Physics. 1982, 170: 507～512

6 胡四一，谭维炎．一维不恒定流计算的三种高性能差分格式．水科学进展．1991，2（1）：11～21

7 Batina J T. Implicit flux—split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes. Journal of AIAA, 1991, 29 (10): 1836～1843

Numerical Modelling of Two-Dimensional Shallow Water Flows on Unstructured Grids

Hu Siyi and Tan Weiyan

(*Nanjing Institute of Hydrology and Water Resources*, *Nanjing* 210024)

Abstract: This paper presents a frame of constructing a family of finite volume high performance schemes on unstrctured grids for solving the shallow-water equations. By introducing upwind decompositions of numerical fluxes in the direction normal to and across each side of cells, four one dimensional algorithms including Osher, TVD, and two Flux-Vector Splittings, can naturally be extended to the two dimensional case. Moreover, boundary procedures applied to opern and land boundaries for both supercritical and subcritical flows are given. Finally, the schemes have been used to model flows over a bump, with a moving land boundary, and of an estuay tide, respectively. The results show that they are not only sufficiently accurate and nonoscillatory, but also capable of treating automatically fow transients, hydraulic jumps, and moving land boundaries.

Key words: unstructured grids; shallow-water equations; finite volume high performance shcemes.