

间断水波在梯级水库中的传播

蔡启富 郑邦民

(武汉水利电力大学治河系 武汉 430072)

摘 要 基于矢通量分裂得到了一维浅水方程组的隐式守恒有限差分格式,并对有底坡、有摩擦的梯级水库同时溃坝和相继溃坝的溃坝波传播进行了数值模拟。对数值结果作了分析。结果合理,方法有效可行。

关键词 间断水波 梯级水库 溃坝 浅水方程组 矢通量分裂

分类号 TV 139.231

1 引 言

有自由面的非定常浅水流动的一维运动方程组是双曲型方程组。溃坝问题,特别是梯级水库的溃坝问题,常常是既包含亚临界流又包含超临界流的混合流场,涉及多个激波的捕获与相互作用等复杂现象。采用守恒、矢通量分裂格式可以根据信息传播方向自动切换到相应的差分格式,激波条件自动满足。因此对亚、超临界混合流场,一个和多个间断水波都能统一处理。由于格式无振荡,能模拟下游是主干河道的间断水波的传播。本文对有底坡、有摩擦、多级水库同时溃坝和因上游水库溃坝的冲击使下游溃坝的相继溃坝作了数值模拟,分析了各种因素对溃坝波的作用。

2 基本方程组

一维非恒定流的控制方程为

$$U_t + E_x + F = 0 \quad (1)$$
$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gP \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_f - S_b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 t 为时间; x 为沿程距离; A 为过水断面面积; Q 为流量; g 为重力加速度; S_b 为底坡; gP 为过水断面上的压力, P 表示为

$$P = \int_0^h (h - \eta) B(\eta) d\eta \quad (3)$$

式中 h 为水深; $B(\eta)$ 为水深 η 处的断面宽; S_f 是摩阻坡度, S_f 可采用

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q| B^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{10}{3}}} \quad (4)$$

式中 n 为 Manning 系数。初始条件: 给出 $t=0$ 时全流场的 A 、 Q 值。

3 计算格式

$$H = \frac{\partial E}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$c = \frac{gA}{B} \quad (6)$$

$u = \frac{Q}{A}$; H 的特征值和特征向量为

$$\lambda_{1,2} = u \pm c \quad e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix} \quad (7)$$

将 H 分裂为

$$H = H^+ + H^- \quad (8)$$

H^+ 和 H^- 对应的特征值分别为

$$\lambda^+ = \frac{1}{2}(\lambda_i + |\lambda_i|) \quad \lambda^- = \lambda_i - \lambda^+ \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t [\alpha \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{n+1} + (1 - \alpha) \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n] \quad (10)$$

式中 α 为加权因子; Δt 为时间步长; 上标 n 为时层。

将 $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{n+1}$ 和 $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n$ 用方程 (1) 代入, 并将 E^{n+1} 、 F^{n+1} 对 t 作 Taylor 展开^[2], 略去高阶小量得

$$\Delta_t U^n + \Delta t \alpha \frac{\partial (H^n \Delta_t U^n)}{\partial x} = - \Delta t \left[\left(\frac{\partial E}{\partial x} + F\right)^n + \alpha (F^n - F^{n-1}) \right] \quad (11)$$

式中 $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$

对 H^n 采用矢量通量分裂并作空间离散

$$\begin{aligned} \Delta(H^n \Delta U^n)_j &= \Delta(H^+{}^n \Delta U^n + H^-{}^n \Delta U^n)_j \\ &= -H_{j-1}^+ \Delta U_{j-1}^n + (H_j^+ - H_j^-) \Delta U_j^n + H_{j+1}^- \Delta U_{j+1}^n \end{aligned} \quad (12)$$

j 为节点号。

为得到完全守恒格式, 对 ΔE^n 采用 Roe 的线性化技术^[1]。

$$\Delta E_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{H}_{j+\frac{1}{2}} \Delta U_{j+\frac{1}{2}} \quad (13)$$

式中

$$\tilde{H}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}^2 - \tilde{u}_{j+\frac{1}{2}}^2 & 2\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{A_j u_j + A_{j+1} u_{j+1}}{A_j + A_{j+1}} \quad (15)$$

$$\tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}^2 = \begin{cases} \frac{g\Delta P_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta A_{j+\frac{1}{2}}} & \text{当 } \Delta A_{j+\frac{1}{2}} \neq 0 \text{ 时} \\ c_j^2 & \text{当 } \Delta A_{j+\frac{1}{2}} = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\Delta f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} + f_j$ 。 \tilde{H} 的特征值和特征向量分别为

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c} \quad \tilde{e}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm \tilde{c} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\tilde{H} = \tilde{H}^+ + \tilde{H}^- \quad (18)$$

\tilde{H}^+ 对应的特征值为 $\tilde{\lambda}_i^+ = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_i + |\tilde{\lambda}_i|)$, \tilde{H}^- 对应的特征值为 $\tilde{\lambda}_i^- = \tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_i^+$, $i = 1, 2$ 。

$$\Delta E_j^n = \tilde{H}_{j-\frac{1}{2}}^{+n} \Delta U_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{H}_{j+\frac{1}{2}}^{-n} \Delta U_{j+\frac{1}{2}}^n \quad (19)$$

最后的计算格式为

$$\begin{aligned} & -\alpha H_{j-1}^{+n} \Delta U_{j-1}^n + \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) I + \alpha (H_j^{+n} - H_j^{-n}) \Delta U_j^n + \alpha H_{j+1}^{-n} \Delta U_{j+1}^n \right] \\ & = - \left\{ \tilde{H}_{j-\frac{1}{2}}^{+n} \Delta U_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{H}_{j+\frac{1}{2}}^{-n} \Delta U_{j+\frac{1}{2}}^n + \Delta x [(1 + \alpha) F_j^n - \alpha F_j^{n-1}] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 Δx 为空间步长; I 为单位体。当 $\alpha = 0$ 时是显格式, $\alpha \neq 0$ 时是隐格式。

4 数值结果

计算状态考虑了如下几点: 计算格式的适用性与精度; 多级水库同时溃坝和相继溃坝、底坡、摩阻、断面形状等对溃坝波的作用。

算例中的数据均为无量纲量。从上游开始依次称第 1 坝、第 2 坝。长度、时间的无量纲参考量分别取第 1 坝上游侧初始水深 h_r 和 $\frac{h_r}{g}$ 。第 1、2 坝下游侧初始水深分别取 0.1、0.1。第 1 坝位于 $x = 0$ 处。 t_0 曲线表示初始状态。 $t_1 \sim t_{10}$ 表示不同时刻溃坝波的特性, $t_1 = 60.00$, $t_2 = 120.61$, $t_3 = 180.90$, $t_4 = 237.73$, $t_5 = 297.07$, $t_6 = 358.11$, $t_7 = 417.26$, $t_8 = 477.08$, $t_9 = 535.20$, $t_{10} = 596.16$ 。计算结果如图 1 ~ 图 7, 图中 Z 为水位, Q 为流量。如不注明, 断面为矩形。

(1) 方法的适用性与精度 对矩形断面, 平底河道, 单个初始间断水波的计算结果表明, 只要下游的初始水深不为零, 数值解与解析解^[3]均符合, 无振荡, 可以模拟水库下游是干河道的溃坝波的传播。

(2) 同时溃坝与相继溃坝对溃坝波的影响 图 1 为两坝相继溃坝, 图 2 为 t_5 , t_{10} 时两坝同时和相继溃坝的比较。当 t 较小, 如 $t < t_3$ 时, 两坝的溃坝波尚未相遇。对同时溃坝可以明显见到后面的波追赶前面的波并逐渐合成过程, 合成后与相继溃坝的波高相同。同时溃坝流量的第 2 峰值在第 2 坝的上游一侧, 相继溃坝流量的第 2 峰值在第 2 坝的下游一侧, 且峰值比前者高。第 1 坝上游的稀疏波运动两者没有区别。随着时间的推移, 两者区别消失, 对下游足够远处, 同时溃坝与相继溃坝的严重程度相同。

(3) 底坡影响 底坡提供了加速流动的作用力。对两级水库底坡均为 0.001, 下游河道

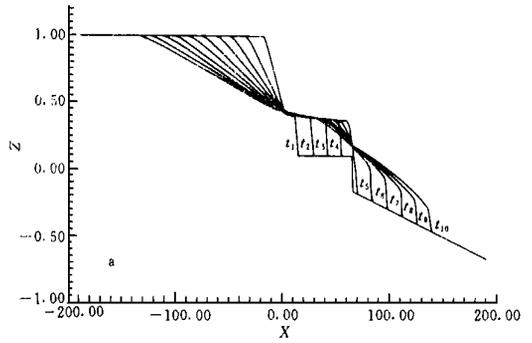
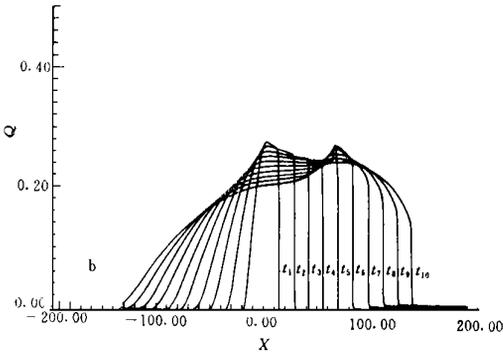


图1 两级水库相继溃坝 $S_b = 0.001, n = 0.037$

Fig. 1. Dam-break of two reservoirs in succession $S_b = 0.001, n = 0.037$

底坡分别为0和0.001的情形作了计算。 S_b 表示下游河道的底坡,计算表明当 $S_b = 0.001$ 时,由于底坡的作用,流速加快,波速明显加快,水深减小,但波头逐渐增高。从第2坝下游到波前处流量逐渐加大,到波前处达到峰值,且随时间增加。 $S_b = 0$ 时,第2坝下游到波前是等流量区向下游传播。

(4) 摩阻的作用 S_f 的作用与 S_b 相反。图3表示两级水库同时溃坝,水库底坡为0.001,下游河道水平, Manning系数分别为0和0.037的比较。表明 S_f 的作用是抹平间断,使波形变光滑,加宽过渡区,显著减少波速、水深和流量。

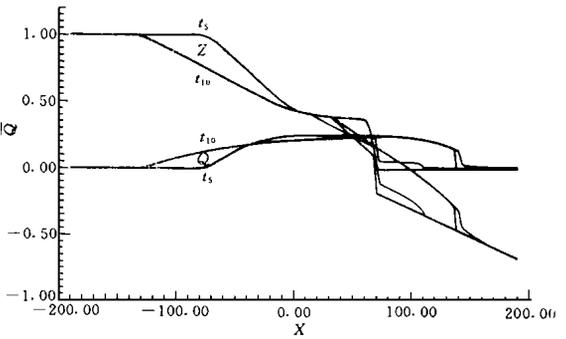


图2 相继溃坝(粗线)和同时溃坝(细线)比较
Fig. 2. Comparison between dam-break of the same time (thick line) and in succession (thin line)

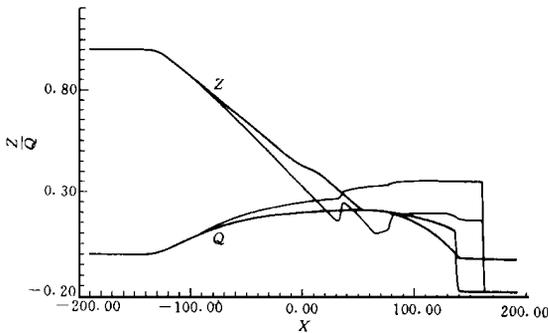


图3 摩阻影响(粗线 $n = 0.037$, 细线 $n = 0$)
Fig. 3. Effect of the friction (thick line, $n = 0.037$, thin line $n = 0$)

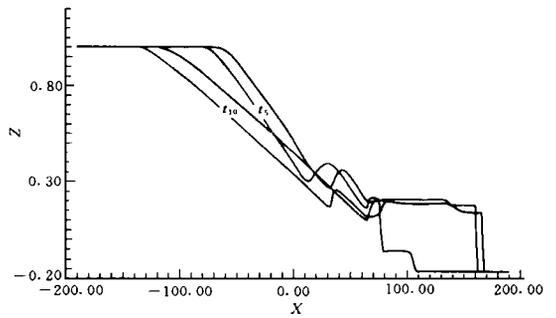


图4 抛物形断面(粗线)和矩形断面(细线)的比较
Fig. 4. Comparison between parabolic (thick line) and rectangle (thin line) section

(5) 断面形状影响 图4比较了矩形断面与抛物形断面的特性。抛物形断面宽 B 与水深

h 的关系取 $B = 0.1 \sqrt{h}$ 。由于断面宽随水深增加, 当水深梯度大时, 抛物形过水断面积的梯度比矩形大, 即断面压力梯度大, 还有侧壁的作用力, 加速了向下游传播的波速, 减缓了向上游传播的波速。

5 结 语

本文的格式可以较好地数值模拟间断水波在任意断面的多级水库中的传播特性, 可以给出流量、流速、水深沿程及随时间变化的数值结果; 并适用于含有亚、超临界流动的混合流场以及水库下游是主干河道的溃坝问题。对 2 级及多级水库连溃的计算表明, 结果合理, 方法有效可行。

参 考 文 献

- 1 Roe P L. Approximate Riemann solvers. parameter vectors and difference schemes. J Comput Phys. 1981, (43): 357 ~ 372
- 2 Akhilesh K J., Juichiro A, Masaru U. Modeling unsteady open-channel flows-modification to Beam and Warming scheme. J Hydr Eng. 1994, (4): 461 ~ 476
- 3 Stoker J J. Water waves. Interscience publishers, Inc. Wiley and Sons. New york, 1957

Discontinuous Water Wave Propagation in the Cascade Reservoirs

Cai Qifu and Zheng Bangmin

(Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan 430072)

Abstract: Based on flux-vector splitting, a conservative and implicit difference scheme is presented for one-dimensional shallow discontinuous water equations with arbitrary cross-section. Numerical simulation has been done for the dam-break problems in the cascade reservoirs with bed slope and friction when the dams are broken at the same time and in succession. Numerical results are discussed. The results are reasonable and show that the method is efficient and feasible.

Key words: discontinuous water wave; cascade reservoirs; dam-break; shallow water equations; flux-vector splitting.