

非均质土壤中二维非饱和土壤 水分运动的随机分析

黄冠华

沈荣开

(中国农业大学水利与土木工程学院 北京 100083) (武汉水利电力大学水利学院 武汉 430072)

摘 要 以一水平向具有空间变异而垂直向为均质的二维非饱和流动区域中的均匀入渗问题为例,应用 Monte Carlo 随机模拟方法分析了土壤水分变量的随机统计特性及其一、二阶矩的时空分布规律。在随机分析过程中,将所研究的流动区域土壤水力特性的空间变异性以随空间位置变化的标定参数 $\delta(x)$ 表示,并将标定参数 $\delta(x)$ 视为一维随机空间函数的实现,应用随机生成模型来生成参数 $\delta(x)$ 的随机样本。通过随机模拟分析得到:垂直方向上负压水头方差与平均负压水头近似呈一线性关系;随入渗时间的延长,不同深度处表征负压水头空间变异结构的自相关函数趋于一稳定结构。

关键词 非均质土壤 土壤水分运动 标定参数 Monte Carlo 模拟 随机分析

分类号 p641.2

1 引 言

在农田土壤墒情预测及污染物的预测预报问题中,都会遇到较大空间范围的非饱和流动问题。由于在一定的空间范围内土壤往往是非均质的,土壤特性具有空间变异性,使得土壤水分运动呈现出随机变化的特征,因而以传统的确定性数学方法来描述该情况下的土壤水分运动便会遇到较大的困难。解决该问题的唯一途径就是采用相应的随机理论与随机方法^①。

本文以一水平向具有空间变异而垂直向为均质的二维非饱和流动区域为例,在上边界为均匀入渗的条件下,应用 Monte Carlo 随机模拟方法分析和研究了土壤水分运动的随机特性及土壤水分变量一、二阶矩的时空分布规律。

2 问题的基本方程及定解条件

假设在所研究的二维区域中,土壤特性沿垂向是均质的,而在水平向上是非均匀或具有空间变异的。在该区域中,土壤水分的运动是二维的。

本文于 1995 年 12 月 19 日收到,1996 年 4 月 29 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金(No. 59509007)及国家教委博士点基金资助项目(No. 9249304)。

①黄冠华. 非饱和土壤水分动态的随机模拟及作物水分生产函数的研究. 武汉水利电力大学博士论文. 1995. 125P

在不考虑源(汇)项的条件下,二维非饱和土壤水分运动基本方程为

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \quad (1)$$

式中 ψ 是土壤负压水头; $K(\psi)$ 是非饱和水力传导度; $C(\psi)$ 是土壤的容水度; t 是时间; x 是水平向空间坐标; z 是垂直向空间坐标, 向下为正。

由于土壤特性沿水平向具有空间变异性, 因此 $K(\psi)$ 、 $C(\psi)$ 可看作是沿水平向一维随机空间函数的实现^①。方程(1)也不是传统意义上的确定性方程, 而是一随机微分方程。假设在 x 方向的左右边界均是通量为零边界, 下边界是水头梯度为零的边界, 上边界为通量已知的入渗边界:

$$\text{初始条件: } \psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z) \quad 0 \leq x \leq X \quad 0 \leq z \leq L \quad t=0$$

$$\text{上边界条件: } -K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi) = IR \quad 0 \leq x \leq X \quad z=0 \quad t>0$$

$$\text{下边界条件: } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad 0 \leq x \leq X \quad z=L \quad t>0$$

$$\text{左、右边界条件: } K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x=0 \quad x=X \quad 0 \leq z \leq L \quad t>0$$

式中 X 、 L 分别为研究区域在 x 方向及 z 方向的伸展范围。

假设所研究的区域沿 x 方向的尺度(X)为 12.5 m, 沿 z 方向的尺度(L)为 2 m。对这样一个流动区域在 x 方向以 $\Delta x = 25$ cm 的步长、 z 方向以 $\Delta z = 2.5$ cm 的步长剖分成大小相等的网格块, 因而在 x 方向共有 51 个节点, 在 z 方向上共有 81 个节点。对方程(1)采用交替方向隐式 ADI 差分格式进行求解。在求解时假设上边界的入渗强度为 8 mm/d, 整个研究区域的初始水头假设为 $\psi_0 = -100$ (cm)。

3 土壤水力特性空间分布的解析表示

标定理论是用以描述土壤特性空间分布的有效方法, 它是根据一标定系数来表示土壤水力特性在一定空间范围内分布的非均匀性, 且标定参数可视为一随机空间函数的实现。通过标定后, 空间上各点的土壤水分特征曲线和非饱和水力传导度均可表示成标定值与一无因次的标定系数的函数, 即

$$\psi(\Theta, x) = \psi^*(\Theta) / \delta(x) \quad (2)$$

$$K(\Theta, x) = K^*(\Theta) [\delta(x)]^2 \quad (3)$$

式中 $\psi^*(\Theta)$ 、 $K^*(\Theta)$ 分别为土壤水分特征曲线及非饱和水力传导度的标定值, 它们是不随空间位置的变化而变化的; $\delta(x)$ 为标定系数, 它是随土壤空间位置的变化而变化的。此时土壤水力特性的空间分布是由 $\delta(x)$ 随空间位置的变化所反映的, 研究^[4,5]表明, δ 在空间上的分布为近似对数正态分布, 并可假设它是统计均匀(或二阶平稳)的, 对于前述的流动区域 $\delta(x)$ 是一维二阶平稳随机空间函数的实现。

标定值 $\psi^*(\Theta)$ 、 $K^*(\Theta)$ 可采用 Van Genuchten (1980) 模型表示:

$$\psi^*(\Theta) = (\Theta^{1/m} - 1)^{1/n} / \beta \quad (4)$$

$$K^*(\Theta) = K_s \Theta^{0.5} \{1 - [1 - \Theta^{1/m}]^m\}^2 \quad (5)$$

其中 $\Theta = (\theta - \theta_0) / (\theta_s - \theta_0)$; β, n, m 为模型参数, 且 $m = 1 - 1/n$; K_s 是饱和水力传导度; θ_0, θ 分别为饱和含水率及剩余含水率。

4 参数 $\delta(x)$ 的随机生成

土壤参数随机场样本的生成是对非饱和土壤水分运动随机模拟的基础。随机场样本生成的方法多种多样, 对于一维随机场 $Y(x)$ 的而言, 其样本可采用一阶自回归模型 $AR(1)$ 、最近邻模型 NNM 等生成。上述两种模型的形式分别为

$$Y_i = \alpha Y_{i-1} + \epsilon \quad (5)$$

$$Y_i = \gamma(Y_{i-1} + Y_{i+1}) + \epsilon \quad (6)$$

式 (5) 为 $AR(1)$ 生成模型。式 (6) 为 NNM 生成模型。 Y_i, Y_{i-1} 分别为空间网格块 $i, i-1$ 的参数值; $\{\epsilon\}$ 是零均值的独立同正态 $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 分布的随机序列, 或正态白噪声序列; α 为 $AR(1)$ 模型的待估参数; γ 为 NNM 模型的待估参数。两模型中参数的估计见文献①, [1]。

对于 NNM 生成模型, 模型残差 ϵ 的方差 σ_ϵ^2 与 Y 的统计特征值 $\sigma_Y^2, \rho(1), \rho(2)$ 存在着以下关系式:

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_Y^2(1 + 2\gamma^2 - 4r\rho(1) + 2\gamma^2\rho(2)) \quad (7)$$

将式 (6) 表示成矩阵的形式:

$$J\{Y_i\} = \{\epsilon\} \quad (8)$$

式中 J 为系数矩阵, 若令 $Y_0 = 0, Y_{N+1} = 0$, 则 J 为三对角矩阵。因此应用 NNM 模型生成随机场样本时, 其步骤如下:

(1) 若已知 Y 的统计特征值 $\sigma_Y^2, \rho(1), \rho(2)$ 及参数 γ , 根据式 (7) 即可求出 σ_ϵ^2 , 在此基础上利用随机数发生器可生成样本容量为 N 的正态随机序列 $\{\epsilon\}, \epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 。

(2) 用 Thomas 算法求解式 (8), 可得到均值为零、方差为 σ_Y^2 的空间相关随机序列 $\{Y_i\}$ 。

(3) 由关于式 $\{Y_i\} = \{Y_i\} + \mu_Y$ 进行转换计算, 即可得到所需生成的随机序列 $\{Y_i\}$ ($Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$), 此序列是母体分布为 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 的二阶平稳随机场的一随机实现或随机抽样。

本文 $\delta(x)$ 样本的生成采用 NNM 模型进行。

5 随机模拟结果的分析与讨论

本文采用 Hopmans 等 (1988) 在荷兰所作试验的统计分析资料作为分析的基础, 通过对 $\Psi(\theta), K(\theta)$ 实测资料的标定分析得到标定曲线 $\Psi^*(\theta), K^*(\theta)$ 中的参数值: $n = 1.592, \alpha = 0.01924, \theta_0 = 0.0, \theta = 0.4024, K_s = 33.7 \text{ cm/d}$, 并通过对标定系数的统计分析得到该系数的统计特征值, 其均值及方差分别为 $-0.1154, 0.3376$, 其相关函数的 $\rho(1) = 0.7, \rho(2) = 0.2$ 。

应用前述的 NNM 模型生成标定参数 δ 的随机样本后, 即将每个随机样本代入数值求解格式进行求解, 并对求解结果进行统计分析, 即可得到水分变量一、二阶矩在时空上的分布

特征。

5.1 垂直方向上负压水头方差与平均负压水头的关系

从图1可以看出，除上边界处的点据外，其它深度处的负压水头方差与平均负压水头之间呈一线性关系，这说明负压水头方差是平均负压水头的函数，而上边界处的点据偏离该直线则可能是由于入渗边界所致。

5.2 负压水头自相关函数的时空变化规律

图2是三种不同深度处负压水头的自相关函数随时间的变化，从图中可以看出0 cm 深度处负压水头15 d 的自相关函数与20 d 的自相关函数是十分接近的，而50 cm、200 cm 两个深度处6 d 后的自相关函数就接近一稳定结构，由此说明不同深度处负压水头的自相关函数都是随时间而变化的，但随着时间延长而逐渐趋近于一稳定结构，且不同深度处负压水头的自相关函数趋近于稳定结构的时间是不同的。这一结果对于研究田间土壤水分的变化规律是十分有用的，尤其是当确定了自相关函数结构的时变特征及其它的统计特征值后，就可根据田间有限的实测水分的数据，借助地质统计方法确定田间不同深度处水分分布的等值线图。此外从图中还可看出，与50 cm、200 cm 深度不同的是0 cm 处自相关函数出现了一定的波动，这可能是由于入渗边界的影响所造成的。

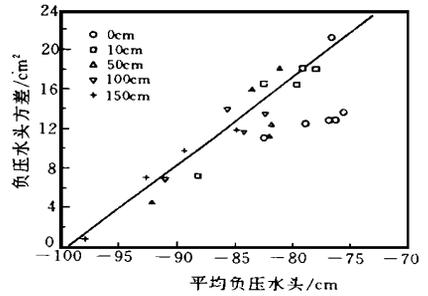


图1 垂直向负压水头方差与平均负压水头的关系

Fig. 1. Relationship between the variance and the mean of negative pressure head in vertical direction

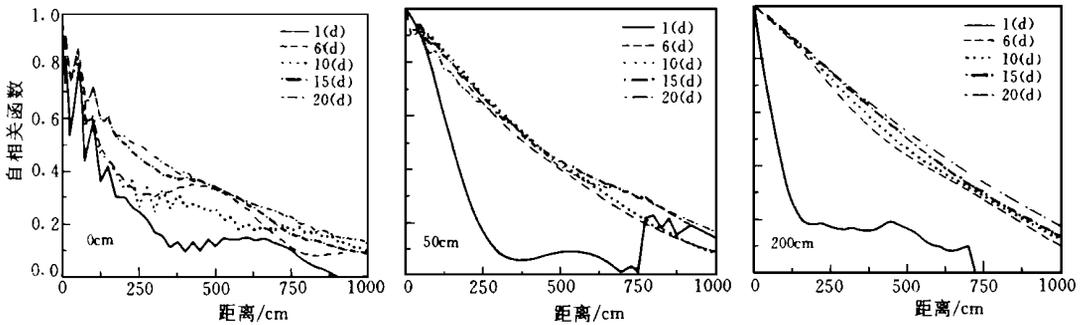


图2 0 cm、50 cm、200 cm 处负压水头的自相关函数随时间的变化

Fig. 2. Auto-correlations of negative pressure head varying with time at depth 0 cm, 50 cm, 200 cm respectively

5.3 不同深度处沿水平向平均负压水头的分布

通过计算可知，不同时间沿 x 方向平均负压水头的分布除在0 cm 深度处具有一定的波动外，在其它深度处的变化则较为平缓，近似于一空间坐标的光滑函数。而造成0 cm 深度处平均负压水头波动的原因可能是入渗边界影响的结果。

5.4 随机样本数对负压水头的空间统计结构（自相关函数）的影响

图3是随机样本数 NMC 分别为10和20时，50 cm 深度负压水头自相关函数随时间的分

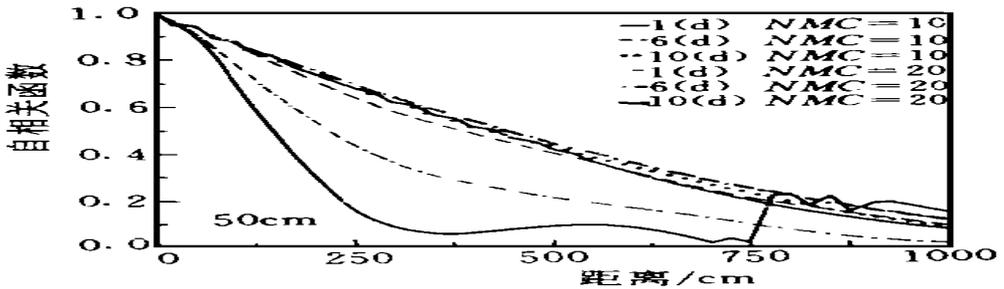


图3 $NMC=10, 20$ 时 50 cm 处负压水头自相关函数随时间变化的比较

Fig. 3. Comparison of autocorrelations of negative pressure head for $NMC=10, 20$ at depth 50 cm

布, 从图中可以看出, 除第 1 天两种情况下的自相关函数的大小有些差别外, 其他时间两者的自相关函数均趋向一致。由此说明, 在本文的例子分析中, NMC 取 10 时即可满足要求。

6 结 论

本文应用 Monte Carlo 随机模拟理论对土壤沿水平向具有空间变异条件下的二维非饱和土壤水分运动进行了随机模拟。分析研究可得到如下结论:

(1) 在垂直方向上负压水头方差与平均负压水头近似呈一线性关系, 说明负压水头方差与平均负压水头存在着一函数关系, 这一结果与理论分析结果^[1,3]相近。

(2) 不同深度处的负压水头的自相关函数是随时间的变化而逐渐趋向于一稳定结构, 这一结果说明对于一定的区域而言在入渗或蒸发较长时间以后, 可以利用一确定的空间变异结构来描述土壤水分在水平向空间上的随机变化特征。

参 考 文 献

- 1 黄冠华, 沈荣开. 土壤水力特性空间变异性的随机模拟. 武汉水利电力大学学报. 1996, 29 (3): 13~18
- 2 Hopmans J W, et al. Two-dimensional steady state unsaturated flow in heterogeneous soil with autocorrelated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 1988, 24 (12): 2005~2017
- 3 Mantoglou, A, L W Gelhar. 2. Capillary tension head variance, mean soil moisture content and effective specific soil moisture capacity. Water Resour. Res. 1987, 23 (1): 47~56
- 4 Russo D, E Brealer. Scaling soil hydraulic properties of a heterogeneous field. Soil Sci. Soc. Am. J. 1980, 44: 681~684
- 5 Warrick A W, et al. Scaling field-measured soil hydraulic properties using a similar media concept. Water Resour. Res. 1977, 13: 355~362

Stochastic Analysis of Two-Dimensional Unsaturated Flow in a Heterogeneous Soil

Huang Guanhua

(*China Agricultural University, Beijing 100083*)

Shen Rongkai

(*Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan 430072*)

Abstract: The problem of two-dimensional unsaturated flow in a hypothetical heterogeneous soil is analyzed by Monte Carlo simulation. It is assumed that the flow domain is scale-heterogeneous along the horizontal direction but homogeneous in vertical direction, and the locally soil water flow can be described by the Richards equation. The heterogeneity in the soil hydraulic properties is represented by a scaling factor which is visualized as being a realization of a one-dimensional spatial stochastic function, and the NNM model is used to generate realizations for the scaling factor. The spatial distribution of soil water pressure head is quantified in terms of its first- and second-order moment. The results indicate that the variance of pressure head is a function of its mean, the spatial covariances of pressure head assume their steady state form after a short period of infiltration.

Key words: heterogeneous soil; soil hydraulic properties; scaling factor; Monte Carlo simulation; stochastic analysis.