

关于潜水含水层的二维（平面）的溶质运移方程 ——兼答张效先先生

朱学愚 孙克让

（南京大学地球科学系 南京 210093）

张效先先生认为笔者在《水科学进展》1994年第1期的论文“佳木斯市地下水水量水质模型”中的溶质运移方程式（5）

$$R_d \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C - uC) + \frac{C \omega}{\theta(H-z)^*} - \sum_j^m \frac{C Q_j}{\theta(H-Z)} \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (1)$$

是错误的，不能用来模拟潜水含水层的溶质迁移问题。为了确定该方程是否正确，我们取真实的物理模型进行推导。^{*}

在含水层中取一微元 ABCDEFGH，面积为 $\Delta x \times \Delta y$ ，高为含水层厚度 $(H - z)$ ，见图1。设地下水的实际平均流速为 u ，方向水平，沿 x 轴和 y 轴的分速度分别为 u_x 和 u_y 。含水层的有效孔隙度为 θ 。污染源呈面状入渗，入渗强度为 ω 。入渗水的溶质浓度为 C 。微元内有一眼井抽水，抽水量为 Q_j 。我们考虑微元内的溶质质量的守恒。为简单起见，不考虑由于化学反应等引起的阻滞作用，令阻滞因子 $R_d = 1$ 。

由 x 方向通过 ABCD 平面进入微元的溶质质量由两部分组成：

对流部分为 $u_x C \theta \Delta y (H - Z)$

弥散部分为 $D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \theta \Delta y (H - Z)$

总的质量即为两部分之和，即

$$[\theta u_x C - \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}] \Delta y (H - Z)$$

而由 x 方向通过 EFGH 平面流出微元的溶质质量为

$$[\theta u_x C - \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}] \Delta y (H - Z) + \frac{\partial}{\partial x} \{ [\theta u_x C - \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}] \Delta y (H - Z) \} \Delta x$$

流入的质量减去流出的质量即为沿 x 轴方向进入微元的质量增量，在时段 Δt 内的增量为

$$- \frac{\partial}{\partial x} \{ [\theta u_x C - \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}] \Delta y (H - Z) \} \Delta x \Delta t$$

因为微元很小，故 $(H - Z)$ 沿 x 方向可认为是常数，上式变为

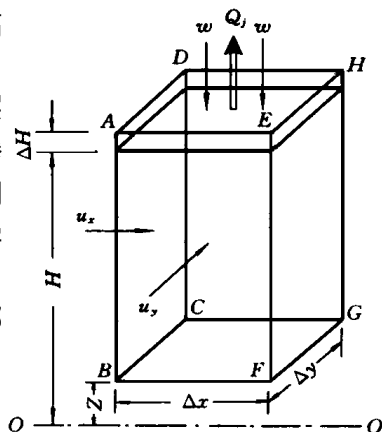


图1 计算用的微元

* 原文处漏掉了孔隙度 θ

$$- \frac{\partial}{\partial x} \{ [\theta u_x C - \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}] \Delta x \Delta y (H - Z) \} \Delta t \quad (2)$$

沿 y 方向进入微元的质量增量可类似推得为

$$- \frac{\partial}{\partial y} \{ [\theta u_y C - \theta D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}] \Delta x \Delta y (H - Z) \} \Delta t \quad (3)$$

由垂直方向进入微元的溶质质量为

$$C \omega \Delta x \Delta y \Delta t \quad (4)$$

由水井抽水抽走的溶质质量为

$$- C Q_j \Delta t \quad (5)$$

因此, 在 Δt 时间内进入微元的总的质量增量为 (2)、(3)、(4)、(5) 诸项相加

$$\begin{aligned} & \{ \frac{\partial}{\partial x} [D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - u_x C] + \frac{\partial}{\partial y} [D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} - u_y C] \} \theta \Delta x \Delta y (H - Z) \Delta t \\ & + C \omega \Delta x \Delta y \Delta t - C Q_j \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

这部分质量增量引起微元内溶质质量在 Δt 时间内的变化, 可写作

$$\frac{\partial}{\partial t} [\theta \Delta x \Delta y (H - Z) C] \Delta t = \frac{\partial}{\partial t} [C(H - Z)] \theta \Delta x \Delta y \Delta t \quad (7)$$

因为 θ , Δx 和 Δy 不随时间变化, 当作常数可提出求导数的括号之外。

两部分质量相等, 可得 (6) 式等于 (7) 式, 即

$$\begin{aligned} & \{ \frac{\partial}{\partial x} [D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - u_x C] + \frac{\partial}{\partial y} [D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} - u_y C] \} \theta \Delta x \Delta y (H - Z) \Delta t + C \omega \Delta x \Delta y \Delta t - C Q_j \Delta t \\ & = \frac{\partial}{\partial t} [C(H - Z)] \theta \Delta x \Delta y \Delta t = \frac{\partial C}{\partial t} (H - Z) \theta \Delta x \Delta y \Delta t + C \frac{\partial H}{\partial t} \theta \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (8)$$

以 $\theta (H - z) \Delta x \Delta y \Delta t$ 除 (8) 式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{C}{H - Z} \frac{\partial H}{\partial t} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} [D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - u_x C] + \frac{\partial}{\partial y} [D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} - u_y C] + \frac{C \omega}{\theta (H - Z)} - \frac{C Q_j}{\theta (H - Z) \Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (9)$$

因为水井抽水当数值计算时自动按面积井计算, 当井位于单元内时水量分摊到整个单元上, 当井位于结点上时则水量分摊到以该结点为公共结点的拼块上, 一般写方程时常把 $Q_j / \Delta x \Delta y$ 写成 Q_j 。如将 (9) 式以场论形式表达, 则为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{C}{H - Z} \frac{\partial H}{\partial t} \\ & = \nabla \cdot (D \nabla C - \bar{u} C) + \frac{C \omega}{\theta (H - Z)} - \sum_j^m \frac{C Q_j}{\theta (H - Z)} \delta(x - x_j, y - y_j) \end{aligned} \quad (10)$$

式中 D 为弥散系数张量, $\bar{u}$ 为孔隙中的实际平均流速矢量。对于均质含水层, 当有效孔隙度 θ 和给水度 μ 相等时, (10) 式等于张效先先生的 (9) 式。

一般情况下, 浓度 C 的数值很小, 当水头变化不大而含水层厚度较大时, (10) 式左端的第二项相当小, 可以忽略不计, 就象潜水流方程的线性化一样。则 (10) 式变为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C - \bar{u} C) + \frac{C \omega}{\theta (H - Z)} - \sum_j^m \frac{C Q_j}{\theta (H - Z)} \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (11)$$

即为当阻滞因子 $R_d = 1$ 时“佳木斯市地下水水量水质模型”中的(5)式。佳木斯市地下水的浓度 C 最大实测值为 $219.5 \text{ mg/L} = 219.5 \text{ g/m}^3 = 2.195 \times 10^{-4} \text{ t/m}^3$ 。水位变幅每年多为 $1 \sim 2 \text{ m}$, 含水层厚度为 80 m 左右, 是完全符合线性化条件的。故在数值计算时采用(5)式即本文的(11)式。我们认为这样处理是合适的、正确的, 就象不能说线性化后的潜水运动方程错误一样。因为全文都没有方程推导, 故直接写出(5)式, 没有进行推导。

至于张效先先生举出的证明方程不成立的例子, 不满足方程的二维平面溶质运移的条件。对于封闭的含水层进行面状抽水, 既没有对流也没有弥散, 和对流—弥散方程推导的前提条件不符, 不能说明什么问题。现在我们再详细讨论一下: 在封闭含水层以面积井抽水的条件下, 方程式(10)的右端第一项和第三项均为零, (10)式变为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{C}{H-Z} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{C \epsilon}{\theta(H-Z)} \quad (12)$$

式中 ϵ 抽水时取负值, 入渗取正值。假设入渗水的浓度 c 等于含水层中的浓度 C , 并且给水度 μ 等于有效孔隙度 θ 则

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C \epsilon}{\theta(H-Z)} - \frac{\mu C}{\theta(H-Z)} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{C}{\theta(H-Z)} [\epsilon - \mu \frac{\partial H}{\partial t}] \quad (13)$$

因为是封闭含水层, 水位 H 的变化仅仅由于入渗或面积抽水 ϵ 引起, 故

$$\epsilon - \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

则有 $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$, $C = C_0$ 。或 $C = \text{常数}$, 即浓度不变。如果入渗水的浓度 C 小于含水层中水的浓度 C ,

则有 $\frac{\partial C}{\partial t} < 0$, 随着入渗的继续, 含水层中水的浓度将减小。反之, C 大于 C , 则有 $\frac{\partial C}{\partial t} > 0$, 则含水层中水的浓度增加, 这符合实际情况。表明(10)式是正确的。但在这种情况下, 方程(10)中的 $\frac{C}{H-Z} \frac{\partial H}{\partial t}$ 不可忽略。但当区域内存在水平方向的流速场和浓度梯度时, 如果忽略弥散项, 方程(11)变为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \bar{u} C + \frac{C \epsilon}{\theta(H-Z)} = -C \nabla \bar{u} - \bar{u} \nabla C + \frac{C \epsilon}{\theta(H-Z)} \quad (15)$$

一般说来速度随空间坐标的变化不大, (15)式右端的 $- \bar{u} \nabla C$ 比 $- C \nabla \bar{u}$ 的数值要大, 不能忽略。故不能由此导出张先生的公式(4)和公式(5), 也不能得出浓度随时间增长的结论。因此, 不能据此得出方程(11) (即原文的方程(5))是错误的结论。

总之, 讨论有助于对问题的加深理解。谢谢张效先先生的文章。