

## 对“佳木斯市地下水水量水质模型”一文看法

张效先

(水利部农田灌溉研究所 新乡 453083)

朱学愚和孙克让先生曾在《水科学进展》1994年第1期发表了“佳木斯市地下水水量水质模型”。在该文中,作者为了克服一般数值法求解对流——弥散方程存在的数值波动现象,采用了单步反向追踪特征有限元法求解溶质运移问题。从作者所建立的溶质迁移方程看,笔者认为有不妥之处。

根据当地的水文地质条件,在运动坐标系下,原文作者建立的溶质运移方程为

$$\frac{dC}{dt} = \nabla(D \nabla C) - fC + W - \sum_{j=1}^m \frac{CQ_j}{\theta(H-Z)} \delta(x-x_j, y-y_j) \quad (1)$$

方程中各项的物理意义见原文方程(15)。作者利用该方程对佳木斯市的地下水水质运移情况作为模拟计算。实际上,方程(1)似有误,不能用于模拟真实物理原型中的溶质迁移问题。为说明这一点,引用一个非常简单的实例,来证明方程(1)是不成立的。

假设有一含水层系统,地下水处于非稳定状态。地下水的开采方式为面状的,其强度为 $\epsilon$ 。地下水位在单位时间的下降速率为 $\eta$ 。另外,含水层周边为不透水边界,弥散作用很小,可以忽略,含水层的初始浓度为 $C_0$ 。对于这样一个理想化的含水层系统,很容易得出在地下水的整个运动过程中,浓度 $C$ 应保持不变,恒为常数 $C_0$ 。但利用方程(1)将得出完全不同的结果。

实际上,对于上述的理想化含水层系统,方程(1)简化为

$$\frac{dC}{dt} = \nabla(D \nabla C) - fC - \frac{C\epsilon}{\theta(H-Z)} \quad (2)$$

利用水流运动方程:

$$u \frac{\partial H}{\partial x} = -(H-Z)\theta \nabla u - \epsilon \quad (3)$$

方程(2)可以进一步写成(忽略了弥散作用):

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\mu}{\theta(H-Z)} \frac{\partial H}{\partial x} C \quad (4)$$

利用积分法,可以求溶质微元在起始和 $t$ 时刻浓度关系为

$$C = C_0 \exp(Mt) \quad (5)$$

式中  $M = \frac{\mu}{\theta(H-Z)}$ 。

式(5)说明,随着时间的增长,含水层中的浓度将逐渐增加,趋于无穷大。这一结果显然与物理原型不一致。

造成这一错误的原因在于潜水含水层中溶质迁移方程。原文所建立的溶质运移质量的守

恒方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D \nabla C - uC) + \frac{C \omega}{\theta(H - Z)^*} = \sum_{j=1}^m \frac{C Q_j}{\theta(H - Z)} \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (6)$$

方程(6)是从承压含水层中的溶质运移方程顺推过来的。其实,对于潜水含水层,方程(6)是不成立的,该方程在质量上是不守恒的。

为建立二维潜水含水层系统内溶质运移的质量守恒方程,取一底面积为  $\Delta x \Delta y$  的柱体,该柱体在  $t$  时刻的高为  $H - Z$ , 其浓度为  $C$ , 在  $t + \Delta t$  时刻,该柱体的高为  $H + \Delta H - Z$ , 其相应的浓度为  $C + \Delta C$ 。在  $\Delta t$  时段内,该柱体内的溶质质量的变化为

$$\begin{aligned} \Delta m &= \theta \Delta x \Delta y (H - Z) (Z + \Delta Z) + \Delta x \Delta y \Delta H (\theta - \Theta) (C + \Delta C) - \Delta x \Delta y \theta (H - Z) C \\ &= \theta \Delta x \Delta y (H - Z) \Delta C + \Delta x \Delta y \Delta H (\theta - \Theta) (C + \Delta C) \end{aligned} \quad (7)$$

式中的  $\Theta$  为  $t$  (或  $t + \Delta t$ ) 时刻,区间  $(H, H + \Delta H)$  内的平均土壤含水率,实际上  $\theta - \Theta$  即为给水度或自由孔隙率。

$\Delta t$  时段内进入该柱体的溶质总量为

$$\{\theta \nabla[(H - Z)(D \nabla C - \nabla u)] + \omega C' - \sum_{j=1}^m Q_j C_j \delta(x - x_j, y - y_j)\} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (8)$$

联立(7)、(8),最终得到质量守恒方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{\theta(H - Z)} \frac{\partial H}{\partial t} C = \nabla(D \nabla C - uC) + \frac{\omega C'}{\theta(H - Z)} - \sum_{j=1}^m \frac{\theta C}{\theta(H - Z)} \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (9)$$

利用水流运动方程:

$$u \frac{\partial H}{\partial t} = - (H - Z) \theta \nabla u + \omega - \sum_{j=1}^m Q_j \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (10)$$

将方程(10)两边同乘浓度  $C$ 。然后将  $\nabla u C$  展成

$$\nabla u C = C \nabla u + u \nabla C \quad (11)$$

稍加整理后便得到运动坐标系下的溶质运移方程为

$$\frac{dC}{dt} = \nabla(D \nabla C) + \frac{(C' - C) \omega}{\theta(H - Z)} \quad (13)$$

当然,若有其它的源汇项,可仿照以上的方法加入到方程(9)和(13)。