

一种新的平原河网水质模型

——组合单元水质模型*

金忠青 韩龙喜

(河海大学 南京 210098)

摘 要 根据平原河网的水力、水质特性,论述了用单元划分法求解单元水质特性的可行性,首次提出并建立了平原河网组合单元水质模型,并将该模型应用于江苏某河网的水质计算,取得了满意的成果。

关键词 平原河网 水质模型

分类号 P 342

1 引 言

河网地区人口稠密,工农业生产比较发达,水质污染也较为严重。因此,如何准确有效地预测河网水质变化,便成为重要的研究课题。就目前而言,数学模型是预测水量水质变化的主要工具。水量模型大致可分为两类,第一类即常用的“河道-节点-河道”三级联解法;第二类即文献 [1]、[2] 提出的单元划分法,该方法曾成功地应用于生产实践,而迄今未见与之匹配的水质模型。本文首次提出:将河网划分成单元,视河网为各彼此相连的单元的组合,从一维对流扩散方程出发,导出任一单元的水质质量守恒方程,联立各单元差分方程,辅以边界及初始条件,求解浓度变化过程。

1.1 单元划分法计算河网水力特性概述

单元划分法是将河网中水力特性相近的一片水体(可以是单一河段,相互交叉河段或面积较大的水塘)划分成一个整体,称为单元。每个单元都有相应的形心、水面积水位关系与容积水位关系,相连单元间水量或水质的交换通过连接河道进行。根据质量守恒,可给出每个单元以水位为自变量的微分形式的质量守恒方程,再加上动力条件,经差分运算,可求出各单元水位、交界面流速和单元间流量交换等水力要素。

1.2 组合单元水质模型的基本思想

按水力水质特性相近的原则,将河网划分成若干单元,要求划分后的单元内部,水位流速变化均匀、水质浓度无悬殊变化。单元间污染物质的交换通过随水体对流及交界面上的扩散而进行。单元污染物浓度以形心处浓度代替,它随时间的变化,取决于交界面上的对流扩散运输、单元内污染物的降解及源项的加入。基于上述物理机制,建立平原河网组合单元水质模型。

* 收稿日期: 1997-1-20; 修改稿日期: 1997-7-2。

2 数学模型

2.1 对流扩散方程及离散

单一河道污染物浓度一维纵向分散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - KC + S \quad (1)$$

式中 C 为污染物浓度; u 为断面平均流速; K_x 为纵向分散系数; K 为降解系数; S 为污染源项。根据有限体积法的基本思想, 每个单元为一控制体, 设污染物浓度沿连接河道呈线性变化, 将方程 (1) 在控制体内积分, 得单元质量守恒方程

$$V_i \frac{\partial C_i}{\partial t} = \sum_j Q_{i,j} C_{i,j} + \sum_j (K x_{i,j} A_{i,j} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial x}) - K V_i C_i + S_i \quad (2)$$

式中 下标 i 为控制体单元编号; 下标 j 为与单元 i 相连的任一相邻单元的编号; V_i 为 i 的容积; $Q_{i,j}$ 为相邻单元 j 流入 i 的流量 (流出为负); $A_{i,j}$ 为 i, j 两单元交界面面积。式 (2) 物理意义为: 单元 i 的浓度变化决定于相连单元流入 (出) 的净通量、扩散净通量、单元内部污染物降解及源项的加入。对 $\frac{\partial C}{\partial t}$ 在 $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ 上离散, 空间差商采用全隐格式, 得

$$V_i \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \sum_j [Q_{i,j}^{n+1/2} (\alpha_j C_j^{n+1} + (1 - \alpha_j) C_j^n)] + \sum_j [K x_{i,j} A_{i,j} (C_j^{n+1} - C_j^n) / D_{i,j}] - K V_i C_i^n + S_i + V_i C_i^n / \Delta t \quad (3)$$

式中 $D_{i,j}$ 为单元形心间距; α_j 为单元交界面上的浓度按距离插值的权重系数; 定义为 $D_{i,j}^{(i)} / D_{i,j}$; $D_{i,j}^{(j)}$ 为单元 j 至交界面的距离。将方程 (3) 整理后, 可简写为

$$\xi_i C_i^{n+1} + \sum_j (\eta_{i,j} C_j^{n+1}) + l_i = 0 \quad (4)$$

其中各系数分别为

$$\xi_i = V_i / \Delta t - \sum_j (\alpha_j Q_{i,j}^{n+1/2}) + \sum_j (K x_{i,j} A_{i,j} / D_{i,j}) \quad (5)$$

$$\eta_{i,j} = - (1 - \alpha_j) Q_{i,j}^{n+1/2} - K x_{i,j} A_{i,j} / D_{i,j} \quad (6)$$

$$l_i = K V_i C_i^n - V_i C_i^n / \Delta t - S_i \quad (7)$$

式 (4) 为单元 i 污染物浓度在 $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ 内的守恒式。

2.2 单元分组及组合单元矩阵方程组

设河网分成 N 个单元, M 个组, 任一组 (设第 J 组) 有 NC 个单元, 与其相邻的第 $(J-1)$ 组有 NP 个单元, 第 $(J+1)$ 组有 NF 个单元。为编程方便, 在每一组内将单元重新编号, 如第 J 组各单元编号分别从 1 至 NC 号。设第 J 组任一单元在组内编号为 l , 与其相邻的任一单元在相应组内编号为 k , 此相邻单元 k 可能位于第 $(J-1)$ 、 J 或 $(J+1)$ 不同的三组。据此, 将式 (4) 中下标 i, j 改用 l, k 表示, 按相邻单元的组别, 将 (4) 中第二项拆成三部分

$$(\eta_{l,k} C_k^{n+1}) = \sum_{k=1}^{NC} [r_J(l, k) C_J^{n+1}(k)] + \sum_{k=1}^{NP} [r_{J-1}(l, k) C_{J-1}^{n+1}(k)] + \sum_{k=1}^{NF} [r_{J+1}(l, k) C_{J+1}^{n+1}(k)] \quad (8)$$

式中 $C_J^{n+1}(k)$ 、 $C_{J-1}^{n+1}(k)$ 、 $C_{J+1}^{n+1}(k)$ 分别为与第 J 组单元 l 相连的位于第 J 、 $(J-1)$ 、 $(J+1)$ 组内第 k 个单元的浓度， $r_J(l, k)$ 、 $r_{J-1}(l, k)$ 、 $r_{J+1}(l, k)$ 为相应的系数，可参照式 (6) 求得，将 (8) 代入 (4)，并令

$$\xi_i = r_J(l, l) \quad (9)$$

用 $C_J^{n+1}(l)$ 表示 C_i^{n+1} ，得第 J 组第 l 个单元的浓度平衡方程

$$\sum_{k=1}^{NC} [r_J(l, k) C_J^{n+1}(k)] + \sum_{k=1}^{NP} [r_{J-1}(l, k) C_{J-1}^{n+1}(k)] + \sum_{k=1}^{NF} [r_{J+1}(l, k) C_{J+1}^{n+1}(k)] + l = 0 \quad (10)$$

显然，式中各系数应表示为

$$r_J(l, k) = \begin{cases} \xi_i & \text{当 } k = l \text{ 时} \\ \eta_{l,k} & \text{当 } l, k \text{ 相连接时} \\ 0 & \text{当 } l, k \text{ 不连接时} \end{cases}$$

$$r_{J-1}(l, k) = \begin{cases} \eta_{l,k} & \text{当 } J \text{ 组 } l \text{ 与 } (J-1) \text{ 组 } k \text{ 相连时} \\ 0 & \text{当 } J \text{ 组 } l \text{ 与 } (J-1) \text{ 组 } k \text{ 无连接时} \end{cases}$$

$$r_{J+1}(l, k) = \begin{cases} \eta_{l,k} & \text{当 } J \text{ 组 } l \text{ 与 } (J+1) \text{ 组 } k \text{ 相连时} \\ 0 & \text{当 } J \text{ 组 } l \text{ 与 } (J+1) \text{ 组 } k \text{ 无连接时} \end{cases}$$

对第 J 组每个单元 l ($l = 1, NC$) 可列出形如 (10) 的方程，联列用矩阵向量表示得

$$[R_{J,J}] \{C_J\} + [R_{J,J+1}] \{C_{J+1}\} + [R_{J,J-1}] \{C_{J-1}\} + \{L_J\} = \theta \quad (11)$$

式中 $[R_{J,J}]$ 、 $[R_{J,J+1}]$ 、 $[R_{J,J-1}]$ 分别为 $NC \times NC$ 阶、 $NC \times NF$ 阶和 $NC \times NP$ 阶矩阵； $\{C_J\}$ 、 $\{C_{J+1}\}$ 、 $\{C_{J-1}\}$ 分别为 NC 、 NF 、 NP 阶列向量； $\{L_J\}$ 为 NC 阶自由列向量； θ 为 NC 阶零向量，联立第 2 至第 $(M-1)$ 组矩阵方程式，得矩阵方程组

$$\begin{cases} [R_{2,2}] \{C_2\} + [R_{2,3}] \{C_3\} + [R_{2,1}] \{C_1\} + \{L_2\} = \theta \\ [R_{3,3}] \{C_3\} + [R_{3,4}] \{C_4\} + [R_{3,2}] \{C_2\} + \{L_3\} = \theta \\ \vdots \\ [R_{J,J}] \{C_J\} + [R_{J,J+1}] \{C_{J+1}\} + [R_{J,J-1}] \{C_{J-1}\} + \{L_J\} = \theta \\ \vdots \\ [R_{M-1,M-1}] \{C_{M-1}\} + [R_{M-1,M}] \{C_M\} + [R_{M-1,M-2}] \{C_{M-2}\} + \{L_{M-1}\} = \theta \end{cases} \quad (12)$$

2.3 边界条件

河网边界上，浓度过程为已知过程。在单元分组时，总可以使第一组和第 M 组单元成为边界单元，分别对应下边界条件和上边界条件。若某些边界单元位于第 2 至第 $(M-1)$ 组，此类边界对相邻单元的影响，计入 $\{L_J\}$ 的相应元素中。下边界条件可写成如下形式

$$\{C_1\} = [B_1] \{C_2\} + \{P_1\} \quad (13)$$

式中 $[B_1]$ 为零方阵； $\{P_1\}$ 为下边界浓度列向量。上边界条件可直接写成如下形式

$$\{C_M\} = \{P_M\} \quad (14)$$

2.4 方程的求解

将下边界条件 (13) 代入 (12)，经递推运算，可得如下闭合的线性矩阵方程组

$$\begin{cases} \{C_1\} = [B_1]\{C_2\} + \{P_1\} \\ \{C_2\} = [B_2]\{C_3\} + \{P_2\} \\ \vdots \\ \{C_J\} = [B_J]\{C_{J+1}\} + \{P_J\} \\ \vdots \\ \{C_{M-1}\} = [B_{M-1}]\{C_M\} + \{P_{M-1}\} \\ \{C_M\} = \{P_M\} \end{cases} \quad (15)$$

式中 $[B_J]$ 为 $NC \times NF$ 阶矩阵; $\{P_J\}$ 为 NC 阶列向量, 其关系如下:

$$[B_J] = - [[R_{J,J}] + [R_{J,J-1}][B_{J-1}]]^{-1}[R_{J,J+1}] \quad (16)$$

$$[P_J] = - [[R_{J,J}] + [R_{J,J-1}][B_{J-1}]]^{-1}[[R_{J,J-1}]\{P_{J-1}\}] + \{L_J\} \quad (17)$$

据式 (15), 由 $\{C_M\}$ 向 $\{C_2\}$ 逐步回代, 可求得各组各单元浓度值。

2.5 模型分析

采用有限体积法离散一维对流扩散方程, 模型精度取决于界面上各变量通量的模拟。一般情况下, 河网水流平缓, Peclet 数不大, 故假设变量在单元间呈线性变化, 根据 Peclet 数较小的特点, 对流项离散较适宜选用中心差分格式, 具有二阶精度, 且避免了迎风格式的人为扩散^[3]。如 Peclet 数较大时, 处理对流项仍采用线性假设, 会出现中心差分困难, 可选用迎风格式或混合格式。本文根据平原河网的水力水质特性, 提出的组合单元水质模型, 能较真实地反映水力水质物理特性。

3 模型的应用

江苏南通河网位于长江下游, 为感潮河网。此区域地势平坦, 水力特性稳定, 较适合用组合单元模型进行河网水力水质计算。本文选用如皋海安境内河网作为算例。图 1 为单元划分示意图。

整个河网划分为 108 个单元, 14 个组, 第 1 组和第 14 组分别为边界单元。用 1994 年 3 月水文水质资料率定模型, 用另 3 个月资料进行验证。水质计算中, 纵向分散系数取 0.3, 降解系数取值范围为 (0.1 ~ 0.3)。水位验证成果见图 2, 水质验证成果见图 3, 结果显示, 模拟效果较好。

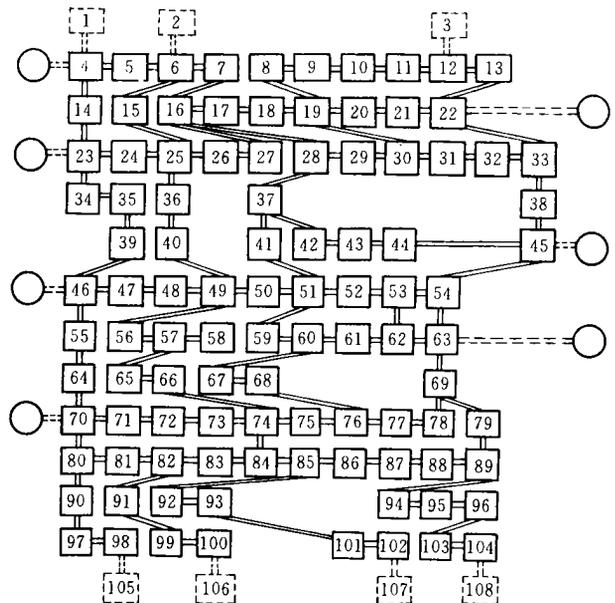


图 1 单元划分示意图

Fig. 1. Sketch map of cells divided

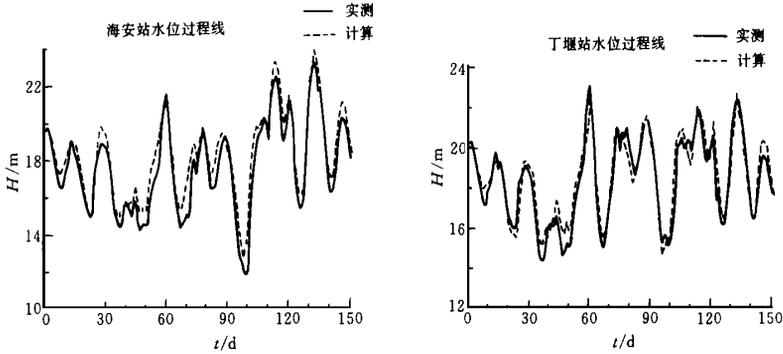
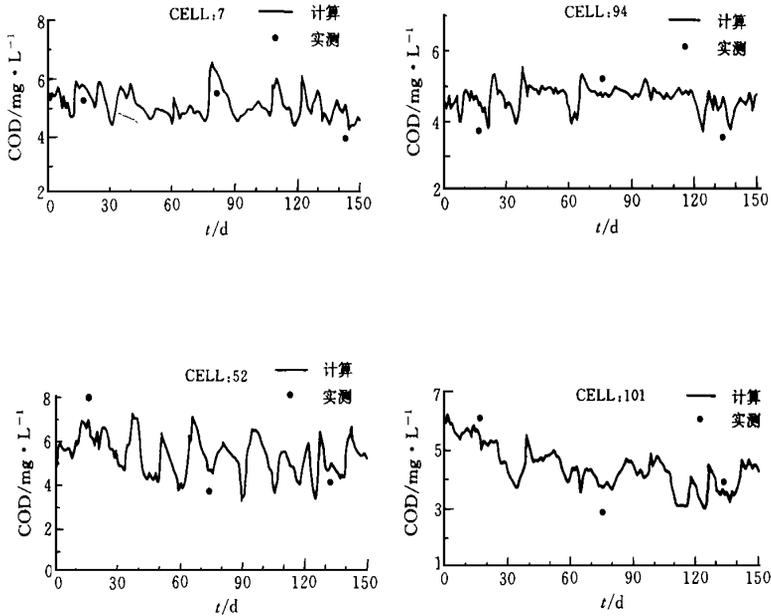


图2 实测及计算水位过程比较

Fig. 2. Comparison of calculated and observed water level

图3 COD_{MN} 实测及计算过程比较Fig. 3. Comparison of calculated and observed concentration of COD_{MN}

4 结 论

(1) 组合单元水质模型从有限体积法导得, 物理概念清晰, 与单元划分法水量模型匹配, 为计算平原河网的水力水质特性提供了一个新的途径。

(2) 目前河网计算广泛采用的“三级联解法”^[4]已较为成熟, 该方法需首先求解节点方程, 而节点方程不再显含诸如子河段水位、流量及污染物排放量等许多重要的断面信息, 给环境规划带来不便, 而组合单元法, 以各单元物理量为直接求解对象, 为环境容量计算、水质规

划及反问题研究提供了方便。

(3) 在进行水质计算时, 若单元体积太小, 在进出单元流向变化急剧时, 可能会出现污染物浓度过大或过小等不合理情况。因此在划分单元时, 单元不宜太小。

参 考 文 献

- 1 Jean A Cunge. Two-dimensional modeling of flooding plains. Unsteady flow in open channels. 1975 (2): 705 ~ 763
- 2 韩龙喜, 张书农, 金忠青. 复杂河网非恒定流计算模型——单元划分法, 水利学报. 1994, (2): 52 ~ 56
- 3 金忠青. N-S 方程的数值解和紊流模型. 南京: 河海大学出版社, 1989. 164~169
- 4 褚君达等. 河网水质模型及其数值模拟. 河海大学学报. 1992, (1): 23 ~ 28

A New Water Quality Model for Plain Rivers System: A Combined Units Water Quality Model

Jin Zhongqing and Han Longxi

(*Hohai University, Nanjing 210098*)

Abstract: According to river network s features of hydraulics and water quality, this paper discusseses the possibility dividing network into cells and constructing water quality model. On the basis of finite volume method, the details of the water quality mathematical model was given. As a check, the model was successfully used in NanTong river network.

Key words: plainnetwork; water quality model.