

# 考虑回水顶托影响的水位预报研究\*

芮孝芳

(河海大学 南京 210098)

姜广斌

(水利部水利信息中心 北京 100761)

程海云

(水利部长江水利委员会水文局 武汉 430010)

**摘要** 将有回水顶托影响的河段视为多输入-单输出系统,把水位过程视为时间序列,用时间序列分析最优控制理论,建立了可考虑回水顶托影响的水位过程预报模型。提出了在棱柱形河道情况下,以时段水位涨差作变量时,模型中各参数应满足的物理性约束条件;较好地解决了长江荆江河段中受回水顶托影响的石首站的水位过程预报问题,为水位过程预报提供了一条不同于水文学途径和水力学途径的建模途径。

**关键词** 回水顶托 水位预报 时间序列分析 最优控制理论 长江 荆江河段

**分类号** p338.1

回水顶托是洪水波在自上而下的传播过程中,遇到某种障碍后向上游反射的一种水文现象,多出现在平原河道、感潮河道或有闸坝控制的河道中。现行这类河道的水位预报方法主要是相应水位法,该法采用经验相关建立预报模型,一般只能预报洪峰水位,不宜作水位过程预报,精度也不高。随着计算河流水力学的发展<sup>[1]</sup>,应用缓变不恒定流的圣维南(St. Venant)方程组来建立考虑回水顶托影响河道的水位过程预报模型,虽已成为一个有效的方法,但它所需的资料包括了一般不易具备的河道地形资料,且求解麻烦费时,对预报值进行实时校正也较困难,故在作业预报中目前尚不实用。因此,寻求一种简单实用、精度较高、便于实时校正、有较强理论基础、可考虑回水顶托影响的水位预报方法,是十分必要的。

本文将水位过程视为时间序列,应用时间序列分析最优控制理论,建立考虑回水顶托影响的水位过程预报模型,较好地解决了长江荆江河段中受回水顶托影响的石首站的水位过程预报问题。

## 1 基本原理

在有回水顶托的河段中,某一断面的水位既受其上游水位的影响,又受其下游水位的顶托。如果把这样的河段视为一个系统,则其中某一断面的水位过程即为系统的输出,而其上、

\* 收稿日期: 1996-08-26; 修改稿日期: 1996-11-15。

\* 国家“八五”重点科技攻关项目。

下游的水位过程即为系统的两个输入 (图 1)。因此, 考虑回水顶托影响的水位预报系统是一个多输入—单输出系统, 而作为该系统输入和输出的水位过程都可视为时间序列<sup>[2]</sup>。对于这样一种系统, 采用 ARMA (p, q) 模型的向量扩展形式, 即 ARMAV (p, q) 模型来描述是适宜的<sup>[3]</sup>

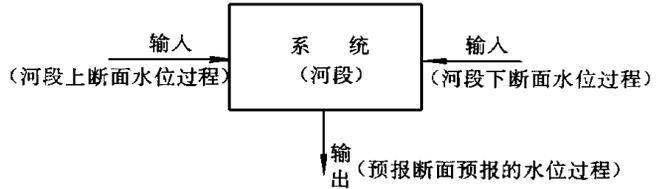


图 1 考虑回水顶托影响的水位预报系统

Fig. 1. System of water level forecasting with backwater effect

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \\ x_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t-2} \\ x_{2,t-2} \\ x_{3,t-2} \end{bmatrix} \\
 &+ \dots + \begin{bmatrix} \varphi_{1p} & \varphi_{2p} & \varphi_{3p} \\ \varphi_{1p} & \varphi_{2p} & \varphi_{3p} \\ \varphi_{1p} & \varphi_{2p} & \varphi_{3p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t-p} \\ x_{2,t-p} \\ x_{3,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \\ a_{3,t} \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} & \theta_{31} \\ \theta_{21} & \theta_{21} & \theta_{31} \\ \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \\ a_{3,t-1} \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} \theta_{1q} & \theta_{2q} & \theta_{3q} \\ \theta_{1q} & \theta_{2q} & \theta_{3q} \\ \theta_{1q} & \theta_{2q} & \theta_{3q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-q} \\ a_{2,t-q} \\ a_{3,t-q} \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中  $x_{1,t-i}$ 、 $x_{2,t-i}$  为  $t-i$  时刻系统的输入, 即河段上、下断面的水位,  $i=0, 1, \dots, p$ ;  $x_{3,t-i}$  为  $t-i$  时刻系统的输出, 即预报断面的水位,  $i=0, 1, \dots, p$ ;  $\varphi_{1i}$ 、 $\varphi_{2i}$ 、 $\dots$ 、 $\varphi_{3i}$  为自回归项参数,  $i=0, 1, \dots, p$ ;  $\theta_{1j}$ 、 $\theta_{2j}$ 、 $\dots$ 、 $\theta_{3j}$  为滑动平均项参数,  $j=0, 1, \dots, q$ ;  $a_{1,t-j}$ 、 $a_{2,t-j}$  为  $t-j$  时刻输入噪声,  $j=0, 1, \dots, q$ ;  $a_{3,t-j}$  为  $t-j$  时刻输出噪声,  $j=0, 1, \dots, q$ ;  $p$  为自回归的阶;  $q$  为滑动平均的阶。

由于  $a_{1,t}$  和  $a_{2,t}$  一般与  $a_{3,t}$ 、 $a_{3,t-1}$ 、 $\dots$  无关, 且在实用中取  $p=2$  和  $q=1$  一般即能满足要求, 故根据最优控制理论, 式 (1) 可变为<sup>[3]</sup>

$$x_{3,t} = C_1 x_{1,t} + C_2 x_{1,t-1} + C_3 x_{2,t} + C_4 x_{2,t-1} + C_5 x_{3,t-1} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\varphi_{11}}{\varphi_{31} - \theta_{31}} & C_2 &= -\frac{\varphi_{12}}{\varphi_{31} - \theta_{31}} & C_3 &= -\frac{\varphi_{21}}{\varphi_{31} - \theta_{31}} \\
 C_4 &= -\frac{\varphi_{22}}{\varphi_{31} - \theta_{31}} & C_5 &= -\frac{\varphi_{32}}{\varphi_{31} - \theta_{31}}
 \end{aligned}$$

式 (2) 为具有 1 个时段滞时的 ARMAV (2, 1) 模型, 即是基于时间序列分析最优控制理论导出的考虑回水顶托影响的水位过程预报模型。

一个河段的上、下游各断面的河底高程常有较大差异, 因此, 用式 (2) 作水位过程预报时, 最好采用时段水位涨差作变量。此时, 用水量平衡原理可以证明, 对于棱柱形河道, 式 (2) 中的参数值满足

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 1 \quad (3)$$

当棱柱形河道中预报断面及其上、下游断面具有同步水位实测系列时, 就可以实测与计

算水位差的平方和最小为目标函数, 以式 (3) 为约束条件, 通过最优化方法求得式 (2) 中的参数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  和  $C_5$ 。事实上, 应用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法可求得这些参数所满足的线性代数方程组为<sup>[4]</sup>

$$\begin{bmatrix} \sum_1^n x_{1,t}^2 & \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{1,t-1} & \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{2,t} & \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{3,t-1} & -\frac{1}{2} \\ \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{1,t-1} & \sum_1^n x_{1,t-1}^2 & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{2,t} & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{3,t-1} & -\frac{1}{2} \\ \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{2,t} & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{2,t} & \sum_1^n x_{2,t}^2 & \sum_1^n x_{2,t} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{2,t} \cdot x_{3,t-1} & -\frac{1}{2} \\ \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{2,t} \cdot x_{2,t-1} & \sum_1^n x_{2,t-1}^2 & \sum_1^n x_{2,t-1} \cdot x_{3,t-1} & -\frac{1}{2} \\ \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{3,t-1} & \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{3,t-1} & \sum_1^n x_{2,t} \cdot x_{3,t-1} & \sum_1^n x_{2,t-1} \cdot x_{3,t-1} & \sum_1^n x_{3,t-1}^2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n x_{1,t} \cdot x_{3,t} \\ \sum_1^n x_{1,t-1} \cdot x_{3,t} \\ \sum_1^n x_{2,t} \cdot x_{3,t} \\ \sum_1^n x_{2,t-1} \cdot x_{3,t} \\ \sum_1^n x_{3,t-1} \cdot x_{3,t} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $\lambda$  为拉格朗日乘子;  $n$  为水位过程的时段数。

求解线性代数方程组式 (4), 即可求得式 (2) 中各参数值。

## 2 实用实例

长江中游荆江河段, 上起枝城, 下至城陵矶, 全长 337km (图 2)。该河段的洪水主要来自于枝城以上长江干流。在沙市附近汇入的支流沮漳河对该河段的洪水影响不大。该河段南岸有松滋口、太平口、藕池口和调弦口 (于 1958 年堵) 等“四口”分泄荆江洪水入洞庭湖; 洞庭湖在接纳“四口”分流和湘、资、沅、澧等“四水”后又于城陵矶注入荆江河段, 从而对该河段的洪水运动产生不同程度的顶托作用。

石首是荆江河段中一个控制断面, 实测资料表明, 其水位主要受到上游沙市水位和下游城陵矶水位的共同影响。沙市至城陵矶河段为具有回水顶托影响的河段。因此, 根据式 (2), 石首站的水位过程预报模型的具体表达式应为

$$\begin{aligned} x_{石,t} = & C_1 x_{沙,t} + C_2 x_{沙,t-1} + C_3 x_{城,t} \\ & + C_4 x_{城,t-1} + C_5 x_{石,t-1} \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $x_{石,t-1}$ 、 $x_{石,t}$  分别为石首站  $t-1$  和  $t$  时刻的时段水位涨差;  $x_{沙,t-1}$ 、 $x_{沙,t}$  分别为沙市站  $t$

- 1 和  $t$  时刻的时段水位涨差;  $x_{城, t-1}$ 、 $x_{城, t}$  分别为城陵矶站  $t-1$  和  $t$  时刻的时段水位涨差。

取 1981 年 ~ 1990 年共 30 次洪水资料, 对式 (5) 中各参数进行了率定, 成果列于表 1。由表可见,  $C_1$  在 - 0.1314 ~ 0.3933 之间, 平均为 0.2026;  $C_2$  在 - 0.2867 ~ 0.6107 之间, 平均为 0.2468;  $C_3$  在 - 0.3475 ~ 0.9012 之间, 平均为 0.3087;  $C_4$  在 - 0.5502 ~ 0.7820 之间, 平均为 0.1810;  $C_5$  在 - 0.5553 ~ 0.6110 之间, 平均为 0.0416。各次洪水的水位过程线的拟合均方差在 0.08 ~ 0.29m 之间, 平均为 0.18m; 确定性系数在 0.90 ~ 0.98 之间, 平均为 0.95。

各次洪水的模型参数值有一定变化, 说明了建模误差、河床变动引起的误差和资料误差等一定程度地存在。为了提高预报精度, 在作业预报时, 可先以表 1 所列各参数的均值作为模型参数的初始值, 然后应用递推最小二乘法进行参数的动态预测, 对预报值作出实时校正<sup>①</sup>。表 2 是石首站一次水位过程实时预报的误差分析, 可见经实时校正后, 不同预见期的均方差均小于率定期的平均均方差, 而确定性系数均大于率定期的平均确定系数。

表 1 石首站水位预报模型参数率定成果

Table 1. Calibrated parameters of the water level forecasting model of Shishou station

洪号	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	均方差 (m)	确定性系数
810714	0.2819	0.2481	0.3559	0.3373	- 0.1456	0.19	0.98
810813	- 0.1314	0.1339	0.7394	0.4490	0.0204	0.27	0.90
810818	0.3933	- 0.2867	0.9012	- 0.5502	0.6110	0.16	0.97
810903	0.2134	0.2768	0.3036	0.1011	0.1191	0.14	0.97
830625	0.1216	0.4287	0.1072	0.3491	- 0.0149	0.24	0.97
830711	0.2167	0.2668	0.3230	0.2962	- 0.0173	0.15	0.97
830801	0.3538	- 0.1768	0.8454	- 0.3761	0.4438	0.29	0.95
830820	0.2081	0.2586	0.2663	0.1117	0.1012	0.24	0.94
840523	0.1254	0.2085	0.4704	- 0.0003	0.1819	0.10	0.96
840625	0.2862	0.0881	0.2781	0.4616	0.0193	0.25	0.95
840705	0.3453	0.1952	0.4905	0.2615	- 0.1844	0.18	0.97
840726	0.2162	0.6107	- 0.3475	0.7820	- 0.3260	0.17	0.92
840830	0.1402	0.2765	0.2284	- 0.0313	0.3393	0.13	0.97
840924	- 0.0588	0.5777	0.3578	- 0.1367	0.1432	0.14	0.97
850603	- 0.0747	0.2265	0.6339	0.1230	0.0671	0.25	0.92
850701	0.3264	0.3413	0.2257	0.2651	- 0.0500	0.15	0.97
850731	- 0.0188	0.4998	0.2927	- 0.0939	0.1480	0.13	0.92
850914	0.4119	0.2066	- 0.0707	0.2359	0.1572	0.22	0.94
860704	0.2738	0.1350	0.3030	0.2561	0.0909	0.26	0.95
870627	0.1816	0.3339	- 0.0230	0.4223	0.0513	0.13	0.98

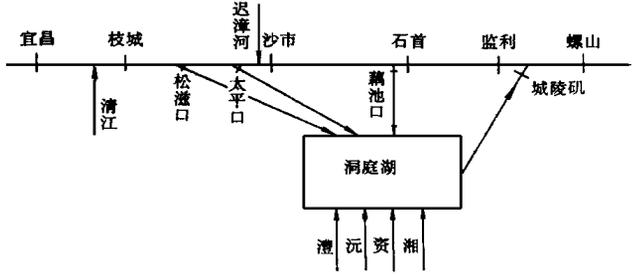


图 2 长江荆江河段水系及测站位置示意

Fig. 2. Scheme of network and hydrology stations position in Jinjiang Reach of Yangtze River

① 芮孝芳, 程海云. 长江荆江河段水位预报新方法. 国家“八五”重点科技攻关项目专题报告. 1995

续表 1

洪 号	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	均方误差 (m)	确定性系数
870720	0.1851	0.1501	0.4060	- 0.0385	0.3263	0.17	0.98
870827	0.2372	0.2797	0.3708	- 0.1485	0.2011	0.12	0.93
880727	0.1450	0.5505	- 0.0076	0.4226	- 0.1702	0.24	0.96
880903	0.2418	0.1971	0.2678	0.1967	0.0596	0.08	0.98
890727	0.1065	0.6081	0.0002	0.1423	0.0132	0.19	0.96
890819	0.3286	0.1753	0.2560	0.3877	- 0.1030	0.20	0.95
900619	0.3172	0.0333	0.2281	0.3749	- 0.0172	0.18	0.97
900701	0.2424	0.3668	0.1225	0.6695	- 0.5553	0.10	0.95
900709	0.2175	0.2678	0.4146	0.4038	- 0.3465	0.10	0.90
900720	0.2431	0.2030	0.5228	- 0.1352	0.0834	0.16	0.92
平 均	0.2026	0.2468	0.3087	0.1810	0.0416	0.18	0.95

表 2 石首站 1995 年 5 月 15 日 ~ 7 月 27 日水位实时预报误差

Table 2. Error of real time forecasting of water level for Shishou station in May 15-July 27, 1995

预见期 (h)	绝对值最大误差 (m)	绝对值最小误差 (m)	均方误差 (m)	确定性系数
12	0.25	0	0.04	0.99
24	0.20	0	0.05	0.99
48	0.35	0	0.11	0.99
72	0.37	0	0.18	0.99

### 3 结 论

(1) 采用时间序列分析最优控制理论建立的水位过程预报模型, 有一定理论根据, 既可用于无回水顶托情况下的水位过程预报, 也可用于有回水顶托情况下的水位过程预报, 为水位过程的预报提供了一条不同于水文学途径和水力学途径的建模途径。

(2) 给出了在棱柱形河道中, 当用时段水位涨差作变量时, 有  $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 1$  的结论。这样就找到了建议的水位过程预报模型各参数必须满足的物理性约束条件, 为模型参数的合理性分析提供了一定依据。

(3) 由于式 (2) 是线性的, 故便于在作业预报中对预报值进行实时校正, 为进一步提高预报值的精度创造了条件。

(4) 本文建立的水位过程预报模型已在长江荆江河段的石首站的水位过程预报中得到成功的应用。在感潮河道和有闸坝控制河道的水位过程预报中也可推广应用。

### 参 考 文 献

- 1 Cunge J A, Holly F M, Verwey A. Practical aspects of computation river hydraulics. Pitman Publishing Limited, London. 1979. 106~121
- 2 芮孝芳, 蒋洪庚. 基于时间序列分析最优控制理论的洪水演算方法. 水利学报. 1993, (4): 41~47
- 3 S M 潘迪特, 吴宪民著. 时间序列及系统分析与应用 (中译本). 北京: 机械工业出版社, 1988.

68 ~ 80

4 D J 华尔德, C S 皮特勒著. 优选法基础 (中译本). 北京: 科学出版社, 1978 年. 19 ~ 21

## Study of Water Level Forecasting Model with Backwater Effect

Rui Xiaofang

(*Hohai University, Nanjing 210098*)

Jiang Guangbin

(*Water Resources Information Centre, Ministry of Water Resources, Beijing 100761*)

Cheng Haiyun

(*Hydrology Bureau of Yangtze River Conservancy Commission, Wnhan 430010*)

**Abstract:** Based on the time series analysis and the optimization control theory, this paper proposes the water level forecasting model with backwater effect, which basically overcomes the shortages of not directly dealing with backwater effect in hydrologic way and complicated calculation in hydraulics way. For prismatic channel the constraint condition of parameters of the model is given. The water level forecasting of the Jinjiang Reach of the Yangtze River with backwater effect is well solved by the model.

**Key words:** backwater effect; water level forecasting; time series analysis; optimization control theory; Yangtze River; Jinjiang Reach.