DOI: CNKI: 32-1309/P. 20110313. 2236. 016

一维畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合模型

——Ⅱ. 模型验证

章少辉^{1,2},许 迪^{1,2},李益农^{1,2},白美健^{1,2}

(1. 中国水利水电科学研究院水利研究所,北京 100048; 2. 国家节水灌溉北京工程技术研究中心,北京 100048)

摘要:基于典型畦灌施肥试验观测结果及其模拟结果,对比分析利用混合数值解法和 Roe 有限体积法分别求解一 维畦灌施肥地表水流与溶质运移过程控制方程在数值稳定性与收敛性、计算精度与效率上的差异,验证混合数值 解法的计算性能与模拟效果。结果表明,混合数值解法比 Roe 有限体积法表现出更佳的数值稳定性和收敛性,产生 的水平衡误差和平均相对误差较低,同样度量环境下的计算效率提高 2.5 倍以上。基于混合数值解法的一维畦灌施 肥地表水流与溶质运移耦合模拟方法可明显增强数值计算的稳定性和收敛性,有效提高计算精度和效率,为开展 畦灌施肥系统设计与评价提供了有效的数值模拟工具。

关键词: 畦灌施肥; 混合数值解法; 稳定性; 收敛性; 计算精度与效率
中图分类号: 0351.2; S275.3
文献标志码: A
文章编号: 1001-6791(2011)02-0196-07

利用 Roe 有限体积法同步耦合求解一维全水动力学畦灌模型和守恒型对流-扩散方程,可使数值模拟结 果在局部与整体时空上保持较好的质量与动量守恒性,体现出流速与溶质对流间的数值互动耦合效应^[1], 但受时间与空间高精度格式构造复杂等因素制约,模拟易导致过高的计算耗时,难以在数值稳定性、收敛 性、计算精度及效率方面达到协调统一^[2]。为此,作者基于隐-显混合时间格式,利用有限差分法、AUSM 与中心格式有限体积法和有限单元法分别对一维畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合模型中的各矢量项进行空 间离散,对形成的控制方程代数方程组进行数值求解,构建起基于混合数值解法的一维畦灌施肥地表水流与 溶质运移耦合模型^[3]。本文基于典型畦灌施肥试验数据,对比分析混合数值解法和 Roe 有限体积法之间在 数值稳定性与收敛性、计算精度与效率上的差异,验证基于混合数值解法的一维畦灌施肥地表水流与溶质运 移耦合模型的模拟效果。

1 畦灌施肥试验和数值解法

1.1 典型畦灌施肥试验

1.1.1 试验处理

在国家节水灌溉北京工程技术研究中心大兴试验基地内,于 2009 年 4 月 5 日开展冬小麦返青期典型畦 灌施肥试验。该基地位于北京市南郊,属半干旱温带大陆性季风气候,年均降水量 540 mm。试验区内表土 为砂质壤土,平均干容重 1.54 g/cm³,灌溉水源为承压地下水。

收稿日期: 2010-04-22; 网络出版时间: 2011-03-13

网络出版地址: http: //www.cnki.net/kcms/detail/32.1309. P. 20110313.2236.016.html

- **基金项目:**国家高技术研究发展计划(863)资助项目(2006AA100210);国家自然科学基金资助项目(50909100);中国水利水电科学研究院科研专项项目(节集1038)
- **作者简介:**章少辉(1977-),男,汉,河北石家庄人,工程师,博士研究生,主要从事田间节水灌溉技术研究。 E-mail: zhangsh@ iwhr. com

典型畦灌施肥试验分为两个处理,入畦单宽流量分别为3 L/(s·m)和6 L/(s·m),灌水时间分别为60 min 和40 min,畦田规格均为长102 m、宽2 m,平均地面坡度4/10000,畦面微地形标准偏差分别为2.21 cm 和 3.13 cm。

试验前将 12 kg 硫酸铵化肥放入储液罐内, 配水使其充分溶解后制备成硫酸铵肥液。畦灌过程中,利用 微型蠕动泵(BT00-600M,南京浩海仪器仪表有限公司,量程:0.07~2280 mL/min)经导液管从储液罐匀速抽 取硫酸铵肥液注入 PVC 输配水闸管,随灌溉水流经闸孔注入畦田(图1)。入畦流量由安装在输配水管道上的 超声波流量计(1010P/WP,美国 CONTROLOTRON,测量流速:0~12 m/s,精度:0.2%)进行实时监控,并通 过闸孔开度调控入畦流量。

1.1.2 试验观测与测试方法

沿畦田纵向中心线,在距畦首0m、30m、50m和 70m处共布设4个观测点,监测地表水流肥料溶质浓 度动态变化过程。待地表水流推进峰通过各测点且水深 达到3cm左右时,开始取样,随后每隔5min取样1 次。当地表水流推进至畦尾并停止灌水后,仍按原时间 间隔取样,直至地表水流运动停止。





对经过滤处理并冷冻保存的水样,利用流动分析仪

(Auto Analyzer III,德国 Bran + Luebbe 公司)测定溶液样本中的氨氮和硝态氮浓度。由于畦灌历时相对较短, 地表水流中的氨氮在缺氧条件下尚难经过硝化反应转化为硝态氮^[4],故只选择氨氮浓度变化过程与数值模 拟结果进行比较。

1.2 模拟区域的初始及边界条件

数值模拟的计算区域为畦长 102 m、畦宽 2 m。数值模拟的初始条件是畦内流速、水深及溶质浓度均为 零。在灌水时间内,入流边界条件为畦首给定的单宽流量及输入溶质浓度,当停止灌水后,畦首边界条件是 入畦流量与溶质通量同时等于零。在整个畦灌过程中,以水流与溶质通量为零作为畦尾边界条件,采用地表 水流与溶质的入渗通量作为下边界条件。

1.3 耦合模型参数选择

根据当地田间双环入渗仪多点试验结果^[5], Kostiakov 入渗经验公式中的 $k = 0.0912 \text{ m/s}^{\alpha}$ 、 $\alpha = 0.23$,田 面糙率系数 $n = 0.08 \text{ m}^{1/6}$,地表溶质扩散系数 D 中的 $C_e = 5 \times C_d = 1 \text{ m}^{1/2}/\text{s}^{[6]}$ 。不同畦灌施肥试验处理下在畦 首观测的地表水氨氮浓度均值 c_0 分别为 64.0 mg/L 和 50.0 mg/L。

1.4 Roe 有限体积法

利用 Roe 有限体积法求解一维畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合控制方程时,在时间离散格式方面,因变量矢量时间导数 $\partial U/\partial t$ 、物理通量矢量的空间导数 $\partial F/\partial x$ 、地形矢量 S_1 ,糙率矢量 S_2 和入渗矢量 S_3 ,采用具备 TVD 性质的二阶显时间格式,并对扩散矢量 S_4 采用隐时间格式;在空间离散格式方面,对物理矢量的空间导数 $\partial F/\partial x$ 和地形矢量 S_1 ,利用 Roe 有限体积法进行离散,并采用中心格式有限体积法离散扩散矢量 $S_4^{[1]}$ 。

由此可见,在空间离散格式方面,混合数值解法与 Roe 有限体积法之间的主要差异表现在对地形矢量的解 算上,虽然两种方法在求解物理矢量空间导数上均采用了有限体积法,但 Roe 有限体积法的格式构造复杂,而 AUSM 和中心格式的有限体积法不仅精度高且格式构造相对简洁^[7];在时间格式离散方面,混合数值解法采用 显格式对入渗矢量 *S*₃ 处理外,其余各矢量项均采用隐格式,这可有效提高数值计算稳定性与收敛性。

2 模拟结果分析与田间验证

基于混合数值解法和 Roe 有限体积法得到的地表水深与地表水流溶质浓度等模拟结果,构造为用于度量数值计算稳定性与收敛性及计算精度的相应参数。由于两种数值解法下模拟的地表水流溶质浓度、地面水 深、溶质质量平衡误差等结果均随空间离散步长 Δx(空间单元格长度)和时空离散步长比值 Δt/Δx 的改变而

发生变化,故用于度量数值计算稳定性与收敛性及计算精度的相应参数均应为 Δx 和 $\Delta t/\Delta x$ 的函数。在由 Δx 与 $\Delta t/\Delta x$ 构成的二维值域平面内,假定度量参数随该值域范围面积呈一致单调变化,则对任意给定的各类 度量参数约束值而言,基于某种数值解法下畦灌地表水流溶质运移数值方程的时空离散变量 Δx 与 $\Delta t/\Delta x$ 具 有较大的组合值域范围,就意味着该解法受各类度量参数约束值的影响较小,其具备较佳的计算性能与模拟 效果。

2.1 数值计算稳定性

2.1.1 度量参数

数值计算稳定性是指初始误差、边界误差、迭代误差等对数值离散方程模拟结果的影响随着时间增长而保持有界的状态^[7]。在数值模拟过程中,采用畦灌水流消退任意空间单元各界面的单宽流量接近于零($q \leq 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$)时的地面水深模拟值的最大振幅 Δh (常取 $\Delta h = 0.01 \text{ m}$),作为畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合模型相应分量方程式的稳定性度量参数^[8],并利用溶质浓度模拟值与畦首入流溶质浓度时均值间的最大相对误差值 P_e (常取 $P_e = 0.01$),作为地表水流溶质运移分量方程式的稳定性度量参数。若将 Δh 记为 P_h ,则取 P_s 作为畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合模型时空离散控制方程的稳定性度量参数。

$$P_{\rm s} = \max(P_{\rm h}, P_{\rm c}) \times 100\%, P_{\rm c} = \max\left[\frac{c(x, t) - C_0}{C_0}\right] \times 100\%$$
 (1)

式中 c(x, t)为畦灌施肥地表水流消退任意空间单元各界面的单宽流量接近于零($q \leq 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$)时,该单元界面处的溶质浓度模拟值, mg/L; C_0 为在畦首观测的地表水氨氮浓度均值, mg/L。

2.1.2 差异分析

图 2 给出 $P_s = 1\%$ 和 0.6% 下相应于两种数值解法的 $\Delta x - \Delta t/\Delta x$ 组合区域范围面积。对所有典型畦灌施 肥处理而言,混合数值解法不同 P_s 度量参数约束值下的 $\Delta x - \Delta t/\Delta x$ 组合区域范围面积均明显大于 Roe 有限 体积法的相应值,这意味着混合数值解法比 Roe 有限体积法具有更好的数值计算稳定性。从图 2 还可看出, 不同算例显示的 $\Delta x - \Delta t/\Delta x$ 组合区域范围面积没有明显变化,这意味着,入畦单宽流量及畦面微地形标准 偏差的变化对数值解法的稳定性影响不显著。



Fig. 2 Numerical stability comparison of two numerical methods for different values of P_s

2.2 数值计算收敛性

2.2.1 度量参数

数值计算收敛性是指当时空离散步长 Δt 和 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合控制方程的数 值解与解析解间的误差值应趋于无穷小量^[7]。当不存在方程解析解时,在沿畦长的实测点处,由数值解法 得到的畦灌施肥地表水流溶质浓度的时间函数值序列为

$$(t)_{i_{a}}^{0}, c(t)_{i_{a}}^{1}, \cdots, c(t)_{i_{a}}^{k_{t}-1}, c(t)_{i_{a}}^{k_{t}}, c(t)_{i_{a}}^{k_{t}+1} \cdots \cdots$$

$$(2)$$

式中 i_o 为沿畦长实测点的标号变量; k_i 为第 i_o 个空间实测点处,与时空离散步长 Δt 和 Δx 相对应的畦灌施 肥地表水流溶质浓度时间函数值序列上标。 $= 1\%^{[9]}$

$$E_{k_{i},k_{i}+1} = \frac{1}{N} \sum_{w_{s}=1}^{N} \frac{|c(t_{w_{s}})|_{i_{o}}^{k_{i}+1} - c(t_{w_{s}})|_{i_{o}}^{k_{i}}|}{c(t_{w_{s}})|_{i_{o}}^{k_{i}}} \times 100\%$$
(3)

式中 N为沿畦长第 i。个实测点处数值模型获得的地表水流溶质浓度模拟离散值总数。

2.2.2 差异分析

图 3 显示出不同平均相对误差 $E_{k_t,k_t+1} = 1\%$ 和 0.6%下相应于两种数值解法的 $\Delta x - \Delta t/\Delta x$ 组合区域范围 面积。对所有典型畦灌施肥处理而言,混合数值解法不同 E_{k_t,k_t+1} 度量参数约束值下的 $\Delta x - \Delta t/\Delta x$ 组合区域范围 面积都大于 Roe 有限体积法的相应值,这表明混合数值解法要比 Roe 有限体积法表现出更好的数值计算 收敛性。此外,处理 1 比处理 2 稍大的组合区域范围面积也表明,较大的入畦流量和畦面微地形标准偏差会 影响数值计算的收敛性。



图 3 两种数值解法在满足不同平均相对误差下的数值计算收敛性比较 Fig. 3 Numerical convergence comparison of two numerical methods for different values

2.3 计算精度与效率

2.3.1 度量参数

计算精度定义为满足数值计算稳定性与收敛性条件下的数值模拟溶质质量守恒误差以及地表水流溶质浓度模拟结果与实测值间的相对误差,相应度量参数包括畦灌末的地表水流溶质质量平衡误差 e。以及地表水流溶质浓度沿畦长的时间模拟值与相应实测值间的平均相对误差 E。^[6]:

$$e_{\rm c} = \frac{c_{\rm in} - (c_{\rm sur} - c_{\rm soil})}{c_{\rm in}} \times 100\%, E_{\rm c} = \frac{1}{M} \sum_{w_o=1}^{M} \left| \frac{c_{o,i_o}^{w_o} - c_{s,i_o}^{w_o}}{c_{o,i_o}^{w_o}} \right| \times 100\%$$
(4)

式中 c_{in} 为由畦首注入的肥料溶质总量, mg; c_{sur} 为地表水流的溶质量, mg; c_{soil} 为入渗至土壤的溶质量, mg; M为沿畦长第 i_o 个测点的水样取样总数; $c_{o,i_o}^{w_o}$ 为沿畦长第 i_o 个测点水样取样数为 w_o 时的溶质浓度实测值, mg/L; $c_{s,i_o}^{w_o}$ 为沿畦长第 i_o 个测点水样取样数为 w_o 时的溶质浓度模拟值, mg/L; 其它符号意义同前。

计算效率指单位时间内完成的模拟计算工作量^[7],其度量参数为1/*T*,其中*T* 为数值求解特定畦灌施肥处理所需的耗时。

2.3.2 溶质质量平衡误差差异分析

图 4 给出不同溶质质量平衡误差 e_c 下相应于两种数值解法的 $\Delta x - \Delta t / \Delta x$ 组合区域范围面积。对不同典型畦灌施肥处理,较大 e_c 值下混合数值解法的 $\Delta x - \Delta t / \Delta x$ 组合区域范围面积明显大于 Roe 有限体积法,这表明,混合数值解法下的溶质质量平衡误差要低于 Roe 有限体积法。





2.3.3 平均相对误差差异分析

图 5 显示出不同平均相对误差 E_c 下相应于两种数值解法的 $\Delta x - \Delta t / \Delta x$ 组合区域范围面积。对所有典型 畦灌施肥处理而言,混合数值解法不同 E_c 值下不同测点的 $\Delta x - \Delta t / \Delta x$ 组合区域范围面积均明显大于 Roe 有 限体积法,这意味着混合数值解法下的模拟值与实测结果间的平均相对误差要小于 Roe 有限体积法。另一方 面,处理1 相对稍大的 $\Delta x - \Delta t / \Delta x$ 组合区域范围面积则表明,较大的入畦单宽流量和畦面微地形标准偏差 还能够影响模拟结果的计算精度。

为了更直观的展示混合数值解法的计算精度,在图 5 中由 Δx 和 $\Delta t / \Delta x$ 所围面积最小的处理 2 测点 70 m 处,在其最外侧等值线上选取 $\Delta x = 2.5$ 和 $\Delta t / \Delta x = 0.5$ 作为两种数值解法的时空步长取值。图 6 显示了两种数值解法模拟处理 2 下模拟值与实测值之间的比较。从图中可以看出,混合数值解法的模拟值与实测值间的



图 5 两种数值解法在满足不同平均相对误差 E。下的计算精度比较

Fig. 5 Numerical precision comparison of two numerical methods for different values of E_c

拟合度较佳, Roe 有限体积法的模拟结果随测点不同出现不同程度的震荡现象,测点 70 m 处最后时间段的 模拟结果甚至由于失稳而不存在。由此可见,在畦内空间域以及溶质浓度变化过程时间域内, Roe 有限体积 法的有效模拟区域(存在模拟值的区域)明显减小。



图 6 两种数值解法模拟典型畦灌施肥处理 2 下的不同测点计算结果与实测值的比较

Fig. 6 Comparison between observational and simulated values by two numerical methods for different observational points of treatment 2

在 Roe 有限体积法能够进行数值模拟的时空有效区域内,表1显示了与图6 对应的两种数值解法模拟值 与实测值之间的平均相对误差。从表1显示的结果可以看出,即使在 Roe 有限体积法的数值模拟时空有效区 域内,由于 Roe 有限体积法的不稳定性,混合数值解法仍具备较佳的计算精度。 2.3.4 计算效率差异分析

以 P_s 、 E_{k_t,k_t+1} 和 E_c 以及 e_c 等度量参数值为基础,在相同数值计算稳定性与收敛性及计算精度等基本相同度量环境条件下,选取 $\Delta x = 2.0$ m 和 $\Delta t/\Delta x = 0.2$ s/m,对比分析两种数值解法间的计算效率差异。由表 2 给出的结果可知,相同实例下混合数值解法的计算效率大致为 Roe 有限体积法的 3.5 倍,采用混合数值解法 可有效提高数值模拟畦灌施肥地表水流与溶质运移过程的计算效率,增强其实用性。

表1 两种数值解法模拟典型畦灌施肥处理2下计算									
结果与	实测值间的平	立均相对误差							
Table 1 Average relative errors between observationaland simulated values by two numericalmethods for treatment 2									
						粉店锯注	不同测点		
						奴旧肝伝	30 m	50 m	70 m
混合数值解法	2.52%	3.14%	2.21%						
Roe 有限体积法	3.26%	5.16%	6.46%						

表 2 两种数值解法计算效率比较 Table 2 Computational efficiency comparison

of two numerical methods

畦灌施肥处理	粉店砌计	计算效率
	奴但胜広	/min ^{- 1}
1	混合数值解法	1.61
	Roe 有限体积法	0.47
2	混合数值解法	2.48
	Roe 有限体积法	0.68

3 结 论

基于典型畦灌施肥试验数据及其相应的模拟结果,对比分析混合数值解法和 Roe 有限体积法之间在数值 稳定性与收敛性、计算精度与效率上的差异,验证混合数值解法的计算性能和模拟效果。与 Roe 有限体积法 相比,混合数值解法表现出更好的数值稳定性与收敛性,产生的水平衡误差和平均相对误差相对较低,且在 相同度量环境下的计算效率提高了 2.5 倍左右。基于混合数值解法的一维畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合 模型可明显增强数值计算的稳定性与收敛性,有效提高计算精度和效率,为畦灌施肥系统的设计与评价工作 提供了一种较为实用的数值模拟工具。

参考文献:

[1] MURILLO J, GARCÍA-NAVARRO P, BURGUETE J. Analysis of a second-order upwind method for the simulation of solute transport in 2D shallow water flow[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids, 2008, 56(4): 661-686.

- [2] 闫超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2007: 139-190. (YAN Chao. Computational fluid dynamics method and application[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics Astronautics Press, 2007: 139-190. (in Chinese))
- [3] 章少辉,许迪,李益农.一维畦灌施肥地表水流与溶质运移耦合模型:I. 模型构建[J]. 水科学进展, 2011, 22(2):189-195. (ZHANG Shao-hui, XU Di, LI Yi-nong. One-dimensional coupled model of surface water and solute transport for border fertigation:I:Model solution[J]. Advances in Water Science, 2011, 22(2): 189-195. (in Chinese))
- [4] ABDELLAOUI A, TALOUIZTE A. Effect of previous nitrogen starvation on NO_3^- and NH_4^+ uptake and assimilation associated with the endogenous soluble carbohydrate utilization in Moroccan wheat seedlings[J]. Journal of Plant Nutrition, 2001, 24(12): 1995-2007.
- [5] 白美健,许迪,李益农,等.地面灌溉土壤入渗参数时空变异性试验研究[J].水土保持学报,2005,19(5):120-123.(BAI Mei-jian, XU Di, LI Yi-nong, et al. Evaluating spatial and temporal variability of infiltration on field-scale under surface irrigation [J]. Journal of Soil and Water Conservation, 2005, 19(5): 120-123.(in Chinese))
- [6] ZERIHUN D, FUMAN A, WARRICK A W, et al. Couple surface-subsurface solute transport model for irrigation borders and basins: II: Model evaluation [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2005, 131(5): 407-419.
- [7] LIOU M S. A sequel to AUSM: Part II: AUSM*-up for all speeds[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 214: 137-170.
- [8] STRELKOFF T S, TAMIMI A H, CLEMMENS A J. Two-dimensional basin flow with irregular bottom configuration [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2003, 129(6): 391-401.
- [9] SHAO Song-dong, EDMOND Y M L. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface[J]. Advances in Water Resources, 2003, 26(2): 787-800.

One-dimensional model for coupling surface water flow with solute transport for border fertigation : II. Model verification *

ZHANG Shao-hui^{1,2}, XU Di^{1,2}, LI Yi-nong^{1,2}, BAI Mei-jian^{1,2}

(1. Department of Irrigation and Drainage, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China;

2. National Center of Efficient Irrigation Engineering and Technology Research, Beijing 100048, China)

Abstract: In this accompanying study, we compare and analyze the differences in stability, convergence, precision and efficiency resulting from the use of two methods in the solution of the one-dimensional model for coupling surface water flow with solute transport for border fertigation (1-DMCSWFSTBF). The first method is the hybrid numerical method, while the second one is the Roe finite volume method. Results show that the hybrid numerical method produces better numerical stability and convergence compared to the Roe finite volume method. Under the same circumstances of measurement, the former method is 2.5 times more computationally effective than the latter one, and the corresponding average relative error and water balance error are also improved. Thus, 1-DMCSWFSTBF based on the hybrid numerical method can significantly increase the computational stability and convergence, and can effectively improve the computational precision and efficiency. The model can be used as an effective simulation tool for the design and performance evaluation of border fertigation systems.

Key words: border fertigaion; hybrid numerical method; stability; convergence; computational precision and efficiency

^{*} The study is financially supported by the National High Technology Research and Development Program of China (No. 2006AA100210) and the National Natural Science Foundation of China (No. 50909100).