

文章编号: 1001-6791(2001)01-0045-06

直接计算压力场的Lattice Boltzmann 模型^{*}

程永光, 索丽生

(河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 简要介绍了Lattice Boltzmann (LB) 方法的基本原理和常用的二维LB 模型, 指出其压力场直接计算的优点, 并给出一种改进的使压力计算更方便的LB 模型, 对恒定和非恒定圆柱绕流的压力场进行模拟, 与文献中已有结果作了比较和分析, 表明计算压力的LB 方法具有正确、简单等优越性。

关 键 词: 流场; Lattice Boltzmann 方法; 模拟; 压力

中图分类号: TV 133.1 **文献标识码:** A

压力是流场模拟中最关心的量, 然而, 在模拟恒定或不可压粘性流时, 压力场的计算一直是传统流场模拟方法感到棘手的问题, 其原因在于恒定或不可压流的连续方程中没有压力项, 而动量方程中压力项以压力梯度的形式出现, 从而使连续方程和动量方程在联立后成为奇异方程组。传统数值方法模拟恒定或不可压NS 方程时, 一般须结合解Poisson 方程(流函数-涡量法、解原始变量的有限差分法)、加入人为压缩项(计算恒定NS 方程的有限差分法)或进行压力校正(解原始变量的有限分析法)等才能解得压力并使计算进行下去。这种计算通常耗时较多, 遇到高维或边界复杂的问题, 迭代有时很难收敛。80 年代末发展起来的Lattice Boltzmann (LB) 方法具有算法简单、边界易处理、压力可直接计算、适合并行处理等诸多优点, 其中压力直接计算是它最具吸引力的地方。本文介绍了LB 方法的基本原理和模型, 说明其压力计算的直接性, 并给出一种改进的适合模拟不可压恒定流的LB 模型, 使压力直接计算的优点更加突出; 对典型圆柱绕流的压力场进行了模拟。

1 LB 方法及其压力计算

1.1 LB 方法简介

LB 方法是以运动论作为背景的一种数值方法, 它通过粒子分布函数按LB 方程的演化来模拟宏观流动^[1,4]。常用的LB 方程是带BGK 碰撞项的LBGK 方程^[1,4]

^{*} 收稿日期: 2000-01-17; 修订日期: 2000-08-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (500090087)。

作者简介: 程永光 (1968-), 男, 山西武乡人, 河海大学水利水电学院博士后, 主要从事水电站水力学方面的研究。

$$f_{\alpha}(r + e_{\alpha}, t + 1) - f_{\alpha}(r, t) = - \frac{1}{\tau} [f_{\alpha}(r, t) - f_{\alpha}^{(0)}(r, t)] \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, b) \quad (1)$$

式中 f_{α} 为粒子分布函数; $f_{\alpha}^{(0)}$ 为局部平衡分布函数; τ 为驰豫时间, 控制 f_{α} 趋向 $f_{\alpha}^{(0)}$ 的速度; r 为流场划分的计算网格点; e_{α} 为粒子的运动速度向量 (图 1); α 表示粒子运动方向。

常规 LB 方法的形式和计算很简单, 它模拟流场的步骤是: 首先根据模型将流场划分为均匀网格; 然后让 LB 方程在网格上演进, 也就是令 f_{α} 按方程 (1) 在计算网格上进行迭代求解; 最后对观测量 f_{α} 求矩, 以计算流场的宏观量如密度和流速等

$$\rho(r, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(r, t), \quad \rho(r, t)u(r, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}(r, t) \quad (2)$$

这样一种简单的分布函数的运动, 实际上对应着复杂的宏观流动。

建立 LB 模型的主要工作实际是: 在一定网格划分 r 和速度离散 e_{α} 的前提下, 通过理论分析确定平衡分布函数 $f_{\alpha}^{(0)}$ 。 $f_{\alpha}^{(0)}$ 的表达式是

由统计力学中 Maxwell-Boltzmann 平衡分布作 Taylor 级数展开, 并取前几项得到的。 $f_{\alpha}^{(0)}$ 的精确表达式应能保证 LB 方程演进时对应的宏观方程正好是我们所要模拟的流动控制方程。 LB 方程对应的宏观方程可用 Chapman-Enskog 展开和多尺度分析获得^[1, 4]。

1.2 模拟 NS 方程的正方形网格九点模型

计算二维问题时常用正方形网格九点模型 d2q9^[3], 它将流场离散为正方形网格, 九个粒子运动向量 $e_{\alpha} = (e_{\alpha x}, e_{\alpha y})$ ($\alpha = 0, 1, \dots, 8$) 见图 1, 表示为矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其平衡分布函数取

$$f_{\alpha}^{(0)} = \tau_{\alpha} \rho \left[1 + 3(e_{\alpha} \cdot u) + \frac{9}{2}(e_{\alpha} \cdot u)^2 - \frac{3}{2}|u|^2 \right] \quad (4)$$

$$t_0 = \frac{4}{9}; t_{\alpha} = \frac{1}{9}, \alpha = 1, 2, 3, 4; t_{\alpha} = \frac{1}{36}, \alpha = 5, 6, 7, 8$$

该模型演进时对应的宏观方程如下

$$\partial_t \rho + \partial_j (\rho u_j) = 0 + O(\epsilon^2) \quad (5)$$

$$\partial_t (\rho u_i) + \partial_j (\rho u_i u_j) = - \partial p + \partial_j (2\nu \rho S_{ij}) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon M^3) \quad (6)$$

式中 压力 $p = C_s^2 \rho$; $C_s = 1/\sqrt{3}$ 为波速; $\nu = \frac{2\tau-1}{6}$; $S_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_j + \partial u_i)$; M 为 Mach 数; ϵ 与 N^{-1} 量级相当。

计算三维流动时常用与上述模型类似的三维正方体网格十五点模型。

1.3 压力计算和 LB 方法的精度

LB 方法的 ρ 有微小的压缩性 (这是实际流体存在的), 故它能借用这个特点, 直接按等熵状态方程 $p = C_s^2 \rho$ 计算压力, 从而大大节省了工作量。 LB 方法计算压力的方便性还表现在边界条件上, 若给定了流速就不需再给压力, 如知道压力就不需要再给流速。

d2q9 模型对应的宏观方程 (5) (6) 与可压缩 NS 方程很相似, 用它们逼近不可压的 NS 方

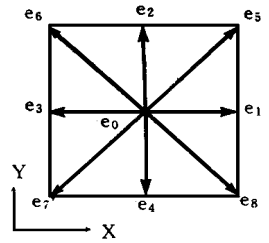


图 1 d2q9 模型的速度向量

Fig. 1. Particle stream vectors of the d2q9 model

程时有三部分误差^[1,2]: $O(\epsilon^2)$, 反映网格划分的粗细, ϵ 对应于空间步长; 反映压缩性影响的 $O(M^2)$; $O(\epsilon M^3)$ 余项。另外, 有关计算证明, 以上模型的波速 $C_s = 1/\sqrt{3}$, 粘性系数 $\nu = \frac{2\tau-1}{6}$ 是很准确的^[1]。所以, 在 Mach 数很小, 即 $O(M^2) < O(\epsilon^2)$ 的情况下, 以上 LB 模型能以空间和时间二阶精度逼近 NS 方程 (空间步长与时间步长比例关系一定, 故时间精度也可看作是二阶的)。

1.4 LB 计算恒定 NS 方程的改进模型

为使 LB 直接计算压力的优点更突出, 本文给出一个适合计算恒定流场的改进模型。LBGK 方程 (1) 改写为

$$p_\alpha(r + e_\alpha, t + 1) - p_\alpha(r, t) = -\frac{1}{\tau} [p_\alpha(r, t) - p_\alpha^{(0)}(r, t)] \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, b) \quad (7)$$

式中 p_α 和 $p_\alpha^{(0)}$ 分别表示压力分布函数和压力平衡分布函数, 其它如前。对于正方形网格九点模型, 改进模型其标志为 d2q9p (与 d2q9 模型相区别), 参照式 (4) 得到平均分布函数 $p_\alpha^{(0)}$ 的表达式

$$p_\alpha^{(0)} = t_\alpha \left\{ p + \frac{\rho_0}{3} \left[3(e_\alpha \cdot u) + \frac{9}{2} (e_\alpha \cdot u)^2 - \frac{3}{2} |u|^2 \right] \right\} \quad (8)$$

式中 ρ_0 是恒定的流场平均质量; t_α 与式 (4) 同。每一计算时步, 压力和流速按下式计算

$$p(r, t) = \sum_\alpha p_\alpha(r, t); \quad u(r, t) = \sum_\alpha e_\alpha p_\alpha(r, t) / \rho_0 C_s^2 \quad (9)$$

该模型运行时对应的宏观方程是

$$\frac{1}{\rho_0 C_s^2} \partial_t p + \partial_i u_i = 0 + O(\epsilon^2) \quad (10)$$

$$\partial_t u_i + \partial_j (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \partial_j (2\nu S_{ij}) + O(\epsilon^2) \quad (11)$$

式中 C_s 、 ν 和 S_{ij} 的值和表达式与 d2q9 一样。d2q9p 模型逼近不可压 NS 方程时有空间误差 $O(\epsilon^2)$ 。所以说, d2q9p 模型趋近恒定状态时, 能以二阶空间精度逼近恒定不可压 NS 方程。

d2q9p 比 d2q9 计算压力更方便, 直接按式 (9) 就能得到压力场。

2 圆柱绕流压力场模拟分析

这里应用前述 d2q9 和 d2q9p 模型, 按基于插值的非均匀网格算法^[11]进行计算。计算恒定绕流用 d2q9p, 计算非恒定涡旋交替脱落用 d2q9。

将圆柱周围流场划分近密远稀的网格, 网格节点用如下极坐标表示

$$r_i = R \cdot \exp(1.8\pi \cdot i/n_x), \quad \theta_j = 2\pi \cdot j/n_y, \quad (i = 0, 1, \dots, n_x; j = 0, 1, \dots, n_y) \quad (12)$$

式中 R 为圆柱半径, $\theta = 0$ 对应于圆柱后驻点, $\theta = \pi$ 对应于圆柱前驻点。

计算时给定远场边界条件速度 $U = 0.1$ 和压力 $p_\infty = 10$ 。圆柱表面为非光滑固壁边界, 给定 $u = v = 0$, 压力未知。设圆柱半径 $R = 25$, 流场划分 $n_x \times n_y = 100 \times 200$ 网格。

2.1 恒定绕流场模拟

针对 Reynolds 数 ($Re = 2RU/\nu$) 从 10 到 200 的恒定绕流场, 用 d2q9p 模型进行模拟。表

1 是所得的分离区长度 L 、分离角 θ 、圆柱前驻点压力系数 C_{p1} 、圆柱后驻点压力系数 C_{p2} ，以及阻力系数 C_D 的结果。文献 [5] 及其引用的其他文献的成果也列于表中，以供比较。表中压力系数用 $C_p = (p - p_\infty) / \rho_0 U^2$ 计算，阻力系数通过 $C_D = \int_{-2\pi}^{2\pi} S \cdot n dl$ 积分得出，其中的 n 是圆柱面外法线，应力张量 $S = - pI + \rho_0 v (\nabla u + u \nabla)$ 。对比说明，无论回流区长度、分离角、压力系数还是阻力系数，本文结果与文献中已有结果吻合，差别均在允许误差之内。图 2 为 $Re = 40$ 时的压力系数空间分布图和流线图，图 3 是不同 Re 的压力沿圆柱面 θ 变化曲线。分析可以看出， Re 变大压力幅度减小；最大和最小压力都在圆柱表面；其中最大压力点位于圆柱前驻点；最小压力点不在后驻点而是位于圆柱对称的两侧，且随 Re 增大而后移。这些与观察结果和文献 [5, 6] 等给出的图案和曲线一致。

表 1 恒定圆柱绕流场参数比较

Table 1. Results of flow past a circular cylinder

参 数 方 法		Re			
		10	20	40	100
$\frac{L}{R}$	A	0.53	1.88	4.69	13.11
	B	0.434	1.786	4.357	
	D		1.82	4.48	12.7
	E	0.458	1.820	4.450	11.376
θ (°)	A	29.6	43.7	53.8	
	B	27.96	43.37	53.34	
	E	25.15	41.44	53.12	66.03
	A	0.745	0.634	0.572	0.530
C_{p1}	B	0.750	0.637	0.558	
	C		0.632		0.571
	D		0.64	0.57	0.53
	E	0.738	0.639	0.565	0.531
C_{p2}	A	- 0.371	- 0.295	- 0.255	
	B	- 0.346	- 0.291	- 0.277	
	D		- 0.27	- 0.23	- 0.17
	E	- 0.378	- 0.295	- 0.243	- 0.202
C_D	A	2.846	2.045	1.522	1.056
	B	2.828	2.053	1.550	
	C		1.998	1.494	
	D		2.000	1.498	1.058
	E	2.864	2.017	1.504	1.078

注：A-Dennis & Chang (1970)；B-Nieuwstadt & Keler (1973)；C-Dennis (1973)；D-Fornberg (1980)^[5]；E-本文LB 模型

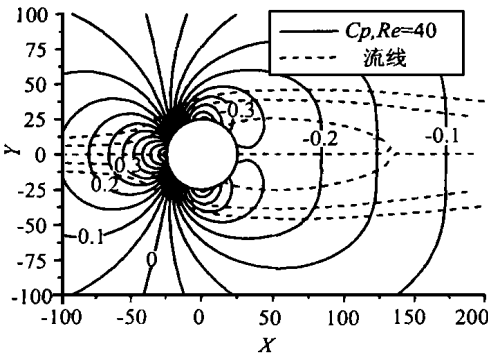


图 2 $Re = 40$ 时压力系数分布图及流线图

Fig. 2. distribution of C_p and the stream lines for $Re = 40$

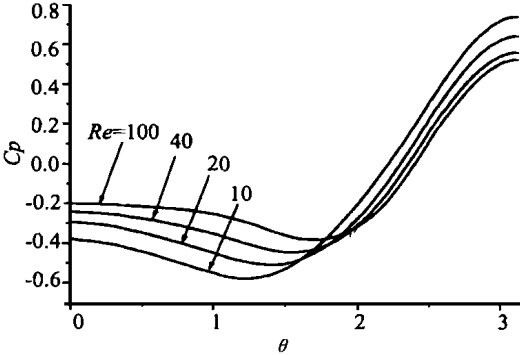


图 3 柱面上压力系数沿 θ 变化曲线

Fig. 3. variation of C_p s along θ on the cylinder surface

2.2 圆柱后涡旋交替脱落

用 d2q9 模拟 $Re = 160$ 的情况，人为扰动获得圆柱后涡旋交替脱落。图 4 展示了计算时间步 $t = 5\,000$ 时的压力系数分布，图中最大压力在前驻点附近，最小压力已不在圆柱表面上，而移到圆后第一个大涡附近。图 5 则是相应的流线和后驻点压力系数随 t 的变化过程。根据后驻点压

力变化过程线可查出交替脱落的频率 $f = 1/T = 1/2675 = 0.000373832$, T 为一个交替脱落周期所对应的时间步数。算出 Strouhal 数 $St = 2fR/U = 2 \times 0.000373832 \times 25/0.1 = 0.1869$, 与其他文献中 0.185~0.188 十分吻合。

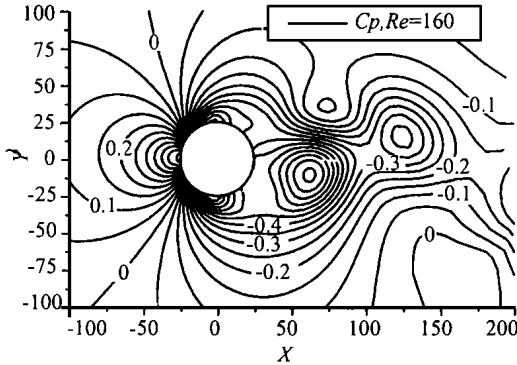


图 4 $Re = 160$ 时压力系数空间分布图

Fig. 4. Spatial distribution of C_p for $Re = 160$

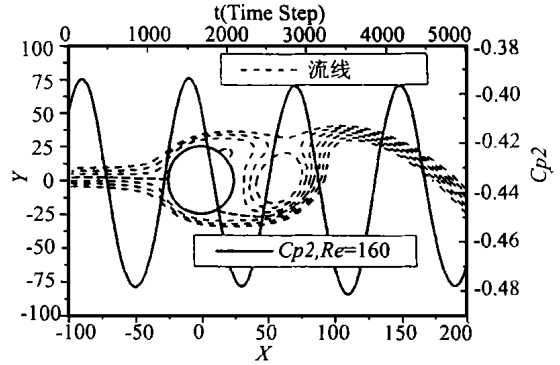


图 5 $Re = 160$ 流线图及后驻点压力系数变化过程

Fig. 5. Stream lines and C_{p2} duration for $Re = 160$

3 结 语

本文介绍并验证 LB 方法的压力直接计算这个对流场模拟有巨大吸引力的优点。传统数值方法模拟不可压 NS 方程时, 须费时费力解压力 Poisson 方程, 而 LB 方法则不需要。文中通过对圆柱绕流的模拟和分析初步证明, LB 方法可直接用压力状态方程计算压力, 得出正确的和其它方法精度相当的结果。

本文提出一种改进的适合计算恒定不可压 NS 方程的模型。有必要提出更好的能模拟非恒定不可压 NS 方程的模型。另外, 有关 LB 方法计算压力的精度问题需要进一步分析研究。

参考文献

- [1] 程永光 Lattice Boltzmann 方法及其在流场分析中应用的研究[D]. 武汉: 武汉水利电力大学, 1998: 6
- [2] 程永光, 张师华, 陈鉴治, 等. 流体力学问题的 Lattice Boltzmann 模型[A]. 水利水电工程研究与实践(第七届水电青年学术会议论文集)[C]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1998: 343-347.
- [3] 李元香, 陈炬桦, 黄樟灿. LB 方法的一个简单多速模型[J]. 计算物理, 1995(4): 547-553
- [4] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1998: 329-364
- [5] Fornberg B. A numerical study of viscous flow past a circular cylinder[J]. J Fluid Mech, 1980, 98: 819-855
- [6] Wagner L. Pressure in Lattice Boltzmann simulations of flow around a cylinder[J]. Phys Fluids, 1994, 6: 3516-3518

Direct Calculation of Pressure by Lattice Boltzmann Model^{*}

CHEN G Yong-guang, SUO Li-sheng

(College of Water Conservancy and Hydro-power Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The basics and the d2q9 (two-dimensional nine-point) model of the lattice Boltzmann method are introduced, and the advantage of its direct pressure calculation is demonstrated. A more efficient model for simulating pressure fields, namely d2q9p, an improved version of d2q9, is presented. Using the model, 2-D steady and unsteady viscous flows past a circular cylinder are simulated. Good agreement between results of the LB and those of other methods shows that LB method is a simple, efficient and accurate approach to simulate pressure fields.

Key words: flow field; Lattice Boltzmann method; simulation; pressure

< 书 讯 >

《亚洲及太平洋地区 21 世纪防洪和管理的区域合作》即将出版

联合国亚洲及太平洋地区经济和社会理事会 (ESCAP) 对本地区各国防洪管理的经验进行了回顾和总结, 并收集了发达国家河流防洪与管理的经验, 编撰成 *Regional Cooperation in the Twenty-First Century on Flood control and Management in Asia and the Pacific* (《亚洲及太平洋地区 21 世纪防洪和管理的区域合作》) 一书。该书总结了亚太地区的防洪实践和经验、防洪与管理的进展、主要问题及发展趋势; 提出了亚太地区 21 世纪防洪管理的区域合作和合作框架; 分析了泰国、澳大利亚等国及其河流洪水特性、防洪与管理的进展与成就、未来管理策略等内容; 并且详细地介绍了一些发达国家防洪与管理经验, 如美国密西西比河 280 年的河流管理与防洪经验及莱茵河流域防洪与管理的新进展等。

该书由水利部南京水文水资源研究所教授张海仑 (原 ESCAP 自然资源司长) 主持编译, 黄河水利出版社正式出版, 全书 16 开本, 约 26 万字, 订价每册 20 元。

本书可供从事水利水电防洪工作人员阅读, 也是有关规划、设计、管理、科研部门和有关院校师生的参考材料。欲购该书可径直和水利部南京水文水资源研究所内《水科学进展》编辑部储开凤小姐联系。地址: 南京西康路一号。邮编: 210024, 电话: (025) 3713777- 50747; 传真: (025) 3737861。

* The Project is Supported by National Natural Science Fund of China (No. 50009007).