**文章编号**：1001-6791(2001)02-0206-04

# 马斯京根-康吉洪水演算方法的稳定性分析

黄国如，胡和平，尹大凯

（清华大学水利水电工程系，北京 100084）

**摘要**：基于运动波差分解的数值扩散，在一定条件下可以模拟扩散波物理扩散的概念，利用有限差分方法，建立了马斯京根-康吉洪水演算方法。对于该差分格式中的权重系数 $X$，国内外长期以来没有统一的定论。本文据此利用 Von Neumann 稳定性分析方法，对该差分格式进行了较为深入的分析，且得到了该差分格式的稳定性条件。

**关 键 词**：运动波；扩散波；马斯京根-康吉；稳定性分析
**中图分类号**：TV 133.2 **文献标识码**：A

用以描述一维非稳定明渠水流的扩散波简化法被广泛地使用于河道洪水演算之中，它通过忽略圣维南方程组中的动力方程中的惯性项后与连续方程联立求解而得，经大量的实践证明，不失为一种既具有足够精度又相对简单的洪水演算方法，其控制方程为[1]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1}$$

式中 $Q$ 为流量；$u$ 和 $D$ 分别为扩散波的波速和扩散系数，此处假设这两个系数均为常数。

在式(1)中，若只考虑对流项，而不考虑扩散项，则该式表示洪水波运动的运动波方程，其运动方程为

$$\mathrm{L}Q \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

式中 L$Q$ 为运动波微分方程的记号。

式(2)的解析解不能反映天然河道中既传播又衰减的洪水波运动。但若采用某一差分格式，将式(2)化为差分方程，则必将带来截断误差。在满足一定条件下，可以应用运动波的数值扩散来模拟扩散波的物理扩散，从而达到数值求解式(1)的计算效果。Cunge[1]于 1969 年首次对此问题进行了研究，并获得了一种演算格式，本文称之为马斯京根-康吉方法。

Cunge[1]在得到马斯京根-康吉演算法的同时，还对该格式中的权重系数 $X$ 进行了研究。他认为该格式之所以能够模拟洪水波的衰减作用，主要是由于权重系数 $X$、$Y$、Courant 数 $r$ 以及波速 $u$ 的共同作用，尤其是 $X$ 的作用。他提出当 $0 \leqslant X \leqslant 0.5$ 时，该有限差分格式稳定，否

**收稿日期**：2000-05-29；**修订日期**：2000-07-28
**基金项目**：国家重点基础研究发展规划项目（G1999043607）；教育部高等学校骨干教师支持计划（1999）
**作者简介**：黄国如（1969－），男，江苏六合人，清华大学水利水电工程系博士后，主要从事水文水资源研究。

则不稳定，且随着权重系数 $X$ 的增加，洪水波的衰减速度降低，直到 $X$ 为 0.5 时，洪水波不再衰减。另外基于圣维南方程组得到了 $X=\frac{1}{2}\left(1-\frac{Q_0}{s_0 Bu\Delta x}\right)$，$Q_0$ 为稳定流量；$s_0$ 为底坡；$B$ 为河宽。

国内外许多学者对该格式进行了研究，对 $X$ 的取值大多数学者直接引用 Cunge 的结论，认为权重系数满足 $0\leqslant X\leqslant 0.5$[2-5]，也有人认为满足 $X\leqslant 0.5$ 即可[6]。

马斯京根-康吉演算方法中的权重系数 $X$ 与马斯京根方法中的流量比重因子 $x$ 相当。$x$ 表示上、下断面流量在槽蓄量中的相对权重，大多数河流的 $x$ 值在 0～0.5 之间，但也有 $x<0$ 的情况。据分析认为[6]，$x$ 值与特征河长 $l$ 有关，且满足 $x=0.5-l/2L$，如果河长 $L<l$，则 $x<0$。

综上可以看出，对于马斯京根-康吉洪水演算方法中的权重系数 $X$，国内外长期以来没有统一的定论。本文就此问题进行分析探讨，且得到了有益的结论。

## 1　马斯京根-康吉演算法[1-3]

如果采用四点偏心加权差分格式，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t}&=\frac{X(Q_i^{j+1}-Q_i^j)+(1-X)(Q_{i+1}^{j+1}-Q_{i+1}^j)}{\Delta t}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{Y(Q_{i+1}^{j+1}-Q_i^{j+1})+(1-Y)(Q_{i+1}^j-Q_i^j)}{\Delta x}\end{aligned}\tag{3}$$

则式(2) 变为差分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,Q\equiv{}&\frac{X(Q_j^{j+1}-Q_i^j)+(1-X)(Q_{i+1}^{j+1}-Q_{i+1}^j)}{\Delta t}+\frac{uY(Q_{i+1}^{j+1}-Q_i^{j+1})+(1-Y)(Q_{i+1}^j-Q_i^j)}{\Delta x}\\ ={}&0\end{aligned}\tag{4}$$

式中　$X$、$Y$ 分别为时间差分的权重和空间差分的权重；$i$、$j$ 分别为空间和时间格点号；$\mathrm{Ln}Q$ 为运动波差分方程的记号。

将式(4)进行 Taylor 级数展开，且作若干数学处理，最终得到下式[2,3]

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+u\frac{\partial Q}{\partial x}-D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=\mathrm{Ln}Q-\varepsilon_2-\cdots\tag{5}$$

式中　$\varepsilon_2$ 为运动波差分方程(4)与微分方程(2)之间的二阶精度截断误差，且必须满足条件

$$u\Delta x\left[\left(\frac{1}{2}-X\right)+r\left(\frac{1}{2}-Y\right)\right]=D\tag{6}$$

式中　$r=u\Delta t/\Delta x$，为 Courant 数。

由式(5)可以看出，当应用差分格式(3)，将运动波方程式(2)化为式(4)时，由于截断误差的影响，式(4)的解仅是式(2)的一阶精度解。如果条件式(6)成立，则差分方程(4)的解变成为扩散波方程(1)的二阶精度解。也就是说，只要式(6)得以满足，不仅可以获得用运动波方程的数值扩散来模拟扩散波的物理扩散的效果，而且解的精度提高到二阶[1-3]。

在式(6)中，令 $Y=1/2$，得到用运动波的数值扩散模拟扩散波物理扩散的条件为

$$X=\frac{1}{2}-\frac{D}{u\Delta x}\tag{7}$$

在满足式(7) 的情况下，从式(4) 中解出

$$Q_{i+1}^{j+1} = C_1 Q_i^j + C_2 Q_i^{j+1} + C_3 Q_{i+1}^j \tag{8}$$

其中 $C_1 = \dfrac{KX + \frac{1}{2}\Delta t}{K(1-X) + \frac{1}{2}\Delta t}$，$C_2 = \dfrac{\frac{1}{2}\Delta t - KX}{K(1-X) + \frac{1}{2}\Delta t}$，$C_3 = \dfrac{K(1-X) - \frac{1}{2}\Delta t}{K(1-X) + \frac{1}{2}\Delta t}$，$K = \Delta x/u$ 为洪水波在 $\Delta x$ 长度内的传播时间。式(8)与熟知的马斯京根法形式完全一样。由于该方法是Cunge[1]首先提出的，故称由式(8)构成的洪水演算方法为马斯京根-康吉法[2]。

## 2 差分格式的稳定性分析

因为该差分格式为显式的，通常不能构成无条件稳定，需要研究它的稳定性，此处采用Von Neumann 法来分析该差分格式的稳定性。

为研究问题的普遍性，考虑 $Y$ 为一般值，先研究此时的四点偏心差分格式(4)的稳定性条件。

根据 Von Neumann 稳定性分析方法，将 $Q_i^j$ 表示为傅立叶～模数型解，即

$$Q_i^j = \xi^j \exp(mip\Delta x) \tag{9}$$

式中 $m = \sqrt{-1}$，为虚数；$p$ 为模数。

由式(9) 可知

$$Q_i^{j+1} = \xi Q_j^i \tag{10}$$

将式(9)和(10)代入式(4)，经整理后得

$$\frac{X}{\Delta t}[\xi^{j+1}\exp(mip\Delta x) - \xi^j\exp(mip\Delta x)] + \frac{1-X}{\Delta t}\{\xi^{j+1}\exp[m(i+1)p\Delta x]$$
$$- \xi^j\exp[m(i+1)p\Delta x]\} + \frac{uY}{\Delta x}\{\xi^{j+1}\exp[m(i+1)p\Delta x] - \xi^{j+1}\exp(mip\Delta x)\}$$
$$+ \frac{u(1-Y)}{\Delta x}\{\xi^j\exp[m(i+1)p\Delta x] - \xi^j\exp(mip\Delta x)\} = 0$$

将上式两边同乘以 $\Delta t/\exp(mip\Delta x)$，经整理后得

$$(\xi - 1)[X + \exp(mp\Delta x) - X\exp(mp\Delta x)] + r[\exp(mp\Delta x) - 1](1 - Y + Y\xi) = 0$$

上式又可以改写为

$$\xi[(X - rY) + \exp(mp\Delta x)(1 - X + rY)]$$
$$= X - rY + r + \exp(mp\Delta x)\cdot(1 - X - r + rY)$$

令 $a = X - ry, b = 1 - X + rY, c = \cos(p\Delta x), d = \sin(p\Delta x)$，则上式简写为

$$\xi(a + bc + mbd) = a + r + (b - r)c + m(b - r)d \tag{11}$$

由 Von Neumann 法可知，该差分格式稳定的条件为 $|\xi| \leqslant 1$，此时差分解保持有界。由式(11)，得

$$|\xi|^2 = \frac{[a + r + (b - r)c]^2 + (b - r)^2 d^2}{(a + bc)^2 + b^2 d^2} \tag{12}$$

即

$$[a + r + (b - r)c]^2 + (b - r)^2 d^2 \leqslant (a + bc)^2 + b^2 d^2$$

化简为

$$(a - b + r)(1 - c) \leqslant 0 \tag{13}$$

式中 $1 - c = 1 - \cos(p\Delta x)$ 非负，所以 $a - b + r \leqslant 0$，将 $a$ 和 $b$ 代入后得

$$(2X - 1) + r(1 - 2Y) \leqslant 0 \tag{14}$$

由式(14) 可知，该差分格式的稳定性条件为

$$X \leqslant 0.5, \quad Y \geqslant 0.5, \quad r \leqslant 1 \tag{15}$$

当 $Y=1/2$ 时，四点偏心差分格式(4)即为马斯京根-康吉演算格式，对应的稳定性条件变为

$$X \leqslant 0.5, \quad r \leqslant 1 \tag{16}$$

## 3 结　语

本文应用运动波的数值扩散模拟扩散波的物理扩散，建立了马斯京根-康吉洪水演算方法，利用 Von Neumann 方法对该方法的稳定性条件作了较为深入的分析探讨。得到了该演算格式的权重系数 $X \leqslant 0.5$ 的结论，且从另一个侧面验证了马斯京根方法的流量比重因子 $x \leqslant 0.5$ 的正确性。

**参考文献：**

[1] Cunge J A. On the subject of flood propagation computation method (Muskingum method)[J]. Journal of Hydraulic Research, 1969, 7(2):205-230.

[2] 芮孝芳.产汇流理论[M].北京:水利电力出版社, 1994.85-88.

[3] 芮孝芳.运动波数值扩散与洪水演算方法[J].水利学报, 1987, 2:37-43.

[4] Antonis D Koussis. Unified theory for flood and pollution routing[J]. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, 1982, 109(12):1 652-1 664.

[5] Victor Miguel Ponce, Fred D Theurer. Accuracy criteria in diffusion routing[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1982, 108(6):747-757.

[6] 庄一鸰，林三益.水文预报[M].北京:水利电力出版社, 1986. 11-21.

[7] Erwin Weinumann P, Eric M Laurenson. Approximate flood routing methods: a review[J] Journal of Hydraulic Division, ASCE, 1979, 105(12):1 521-1 535.

# Stability Condition Analysis of Muskingum-Cunge Flood Routing Method*

HUANG Guo-ru, HU He-ping, YIN Da-kai

(*Department of hydraulic engineering*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

**Abstract**: Based on the concept of the numerical dispersion of Kinematic-wave to model the physical dispersion of diffusion wave at a certain condition, the Muskingum-Cunge flood routing method is developed by means of the finite difference method. As for the weighting factor $X$ in the method, hydrologists have not obtained a uniform conclusion for along time, so this paper researches the problem using the Von Neumann method and the stability condition of the routing method is systematically analyzed.

**Key words**: kinematic-wave; diffusive-wave; Muskingum-Cunge; stability condition analysis

* The Project is a key basic research programme of China(G1999043607)