

# 最大熵原理在水文水资源科学中的应用.

王 栋, 朱元生

(河海大学水文水资源与环境学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 简介最大熵原理的基本概念、理论和该原理在水文水资源科学领域中应用研究的进展, 综述水文频率分析中推导概率分布和参数估计, 时间序列最大熵谱分析等方面的研究成果, 展望今后的研究趋向和应用前景。

**关 键 词:** 最大熵原理; 水文; 水资源

**中图分类号:** TV 211; O 236 **文献标识码:** A

## 1 最大熵原理 (POME) 的导出

水文水资源科学从本质上看, 是一门有关水信息(采集、传输、整理、分析、研究)的学科。信息熵是将熵概念成功地扩展到信息科学领域。1929 年, 匈牙利科学家 L.Szilard 首先提出了熵与信息不确定性的关系, 使信息科学引用熵的概念成为可能。1948 年, 贝尔实验室的 C.Shannon 创立了信息论, 他把通讯过程中信源讯号的平均信息量称为熵, 实现了信息熵的实际应用, 从此对信息熵的研究, 随着信息科学的发展而得到不断的发展。C.Shannon 对离散无记忆信源  $X$  的信息量, 定义为  $n$  维概率矢量  $\vec{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  的函数:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = H(\vec{P}) \quad (1)$$

式中  $H(\vec{P})$  称为信息熵的熵函数。信息熵函数具有熵的全部基本性质(如非负性、对称性、扩展性、可加性等)。熵恒增定律在信息熵领域则叫做“最大熵原理”(Principle of Maximum Entropy, POME)。1957 年, E.T.Jaynes 首次明确提出了 POME, 并且成功地解决了信息科学中广为存在的不适定问题(ill-posed problem), 由此开创了 POME 发展之先河<sup>[1]</sup>。

“不适定问题”是求解时由于数据不完全或有噪声, 或两者兼有, 使掌握的数据不足以推求该问题的确定解。其中包括所测得的数据求解时所给定的条件或假设。根据 POME 认为: 在“不适定问题”的所有的可行(可能)解中, 应选其中熵值最大的一个解。熵最大意味着对因为数据不足而作的人为假定(人为添加信息)最小, 从而所获得的解是最合乎自然、最为超然, 偏差最小。同时, POME 的算法还具有计算简单快捷等优点。例如要根据 POME 原理, 推断随机变量  $X$  的概率密度分布函数  $f(x)$  时, 将 POME 写成表达式为

$$O.F \quad \text{Max} S = - \int_R f(x) \ln[f(x)] dx \quad (2)$$

\* 收稿日期: 2000-06-19; 修订日期: 2000-10-16

作者简介: 王 栋 (1972-), 男, 山东沂水人, 河海大学水文水资源与环境学院博士研究生, 主要从事水文水资源及水环境领域的风险分析、系统优化、非线性建模等研究。

$$S.t \quad \int_R f(x) dx = 1 \quad (3)$$

$$\int_R x^i f(x) dx = M_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$X \geq b \quad (5)$$

式中  $R$  为随机变量  $X$  所在集合;  $f(x)$  为  $X$  的密度函数;  $M_i$  为第  $i$  阶原点矩;  $m$  为  $X$  的矩的阶数;  $b$  为保证  $X$  有意义的量。模型的约束条件为  $m+2$  个。

为了求得  $f(x)$  的表达式, 可以用经典的微积分方法来解此模型。引入拉格朗日乘子

$$O.F \quad \text{Max} S = S + (\lambda_0 + 1) \left[ \int_R f(x) dx - 1 \right] + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[ \int_R x^i f(x) dx - M_i \right] \quad (6)$$

$$\text{解出密度函数} \quad f(x) = \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) \quad (7)$$

此即最大熵密度函数的解析形式, 只要确定其中的参数  $\lambda$  就可以完全确定  $f(x)$ 。经数学变换, 推导出求解拉格朗日乘子的联立方程为

$$\lambda_0 = -\ln \left[ \int_R \exp \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \right) dx \right] \quad (8)$$

$$M_i = \int_R x^i \exp(\lambda_i x^i) dx / \int_R \exp(\lambda_i x^i) dx \quad (9)$$

$$\text{计算中, (8) 式写为} \quad 1 - \int_R x^i \exp(\lambda_i x^i) dx / M_i \int_R \exp(\lambda_i x^i) dx = R_i \quad (10)$$

求上式残差平方和  $\text{Min} R = \sum_{i=1}^m R_i^2$  的最小值即可得到该不适定问题的解。

## 2 POME 在水文水资源科学中的应用研究

### 2.1 水文频率分析的概率分布推导

在水系统中应用 POME 最多的是水文频率分析研究, 推导水文随机变量的概率分布和参数估计两个方面。在水文频率分析研究中, 由于无法从概率论理论直接推导出水文变量的先验分布, 一般只能是依据观测数据, 通过统计来推求近似的后验分布。然而水文变量现有的观测数据十分有限, 现有的数据远不足以推求概率分布。这是一个典型的“不适定问题”。

J.O.Sonuga (1972) 首次将 POME 应用到水文频率分析中, 推导了基于有限数据的小偏差的正态分布以进行频率分析, 只需均值和标准差作为先验信息<sup>[3]</sup>。他 (1976) 还针对降雨-径流过程, 定义了条件熵, 应用 POME 推导出径流对降雨的条件分布<sup>[4]</sup>。P.W.Jowitt (1979) 基于 POME 分析导出极值-I 型分布, 以年最大洪水序列进行了解释和验证<sup>[5]</sup>。V.P.Singh 和 K.Singh (1985) 先后以 POME 推导了二参数 Gamma 分布和 P-III 型分布, 并特别指出 POME 法和极大似然法之间存在一种特殊的联系<sup>[6, 7]</sup>。N.Sogawa 和 M.Araki 等 (1986) 以 POME 推导了多元分布, 将其应用到年降水和年最大降水的分析中<sup>[9]</sup>。V.P.Singh (1986) 应用 POME 推导了对数 Gumbel 分布<sup>[10]</sup>, 1987 则以之推导了 Weibull 分布<sup>[11]</sup>和极值-III 型分布<sup>[12]</sup>。V.P.Singh 和 K.Singh (1987) 以 POME 推导了三参数对数正态分布<sup>[13]</sup>, 1988 则推导了对数 P-III 型分布<sup>[14]</sup>。徐宗学 (1987) 探讨了 POME 的数学性质及其与极大似然法的相互关系, 借助其导出了常见的各种概率密度函数, 对不同分布之间的差异从不确定性的角度进行了理论分析, 最后以

P-III 型分布为例, 讨论了参数识别的具体方法<sup>[15]</sup>。P.F.Krstanovic 和 V.P.Singh(1987)基于 POME 推导了多元频率分布, 用于洪水分析<sup>[16]</sup>。N.H.Lind 和 X.Chen(1987)应用 POME 推导了满足一致性准则的先验分布, 用于多元系统的可靠性分析<sup>[17]</sup>。马力和张学文(1993)研究了 POME 与概率分布函数问题, 认为 POME 可以作为众多概率分布的统一的理论支柱<sup>[18]</sup>。V.P.Singh 和 H.Guo 等(1993)以 POME 推导了三参数双对数分布<sup>[19]</sup>。V.P.Singh 和 H.Guo(1995)基于 POME 分别推导了二参数 Pareto 分布<sup>[20]</sup>, 三参数通用 Pareto 分布<sup>[21]</sup>, 二参数双对数分布<sup>[22]</sup>, 后(1997)又推导了二参数通用 Pareto 分布<sup>[23]</sup>。张明(2000)引入 POME 对地貌瞬时单位线中的等待时间概率密度函数进行了研究, 导出等待时间概率密度函数等价于 P-III 型分布<sup>[24]</sup>。

总之, 基于 POME 推导频率分布, 人为偏差最小, 所得结果客观, 合乎自然。

## 2.2 水文频率分析的参数估计问题

在水文频率分析研究中, 由于导出的分布仅有的参数是以约束方程组形式表达, 得出的分布的函数形式是无限制的。另一方面, 也可对假定的有参概率分布函数(如传统的二参数 Gamma 分布、P-III 型分布、三参数对数正态分布、对数 P-III 型分布等), 根据样本数据作参数估计, 若考虑到样本数据所含可观的抽样误差, 则参数估计仍旧适用 POME 的“不适宜问题”。

P.W.Jowitt(1979)对极值-I 型分布, 提出了一种应用 POME 进行参数估计的简单算法, 与极大似然估计加以比较, 在大容量样本时两法相当<sup>[4]</sup>。V.P.Singh 和 K.Singh(1985)以 POME 对二参数 Gamma 分布<sup>[5]</sup>和 P-III 型分布<sup>[6]</sup>进行估计, 与矩法、极大似然法、累积量法、最小二乘法等进行了比较, 结论是: 与极大似然法相当, 优于其它方法; 后来(1987), 又基于 POME 对三参数对数正态分布<sup>[13]</sup>和对数 P-III 型分布<sup>[14]</sup>进行了参数估计。V.P.Singh(1986)应用 POME 对对数 Gumbel 分布<sup>[10]</sup>进行估计, (1987)估计了 Weibull 分布<sup>[11]</sup>和极值-III 型分布<sup>[12]</sup>。D.Jain 和 V.P.Singh(1986)对极值-I 型分布, 以 POME 作参数估计, 并对 POME 方法的优势和相关问题进行了讨论<sup>[25]</sup>。K.Arora 和 V.P.Singh(1987)进一步研究和对比 POME 方法与传统参数估计方法(矩法、极大似然法、概率权重矩法、混合矩法、最小二乘法等)的长短, 结论是: POME 与极大似然法相当, 优于其它方法<sup>[26]</sup>, 后(1989)又研究了对数 P-III 型分布的参数估计 POME 方法<sup>[27]</sup>。李元章和丛树铮(1985)研究了参数估计的 POME 方法, 认为以之确定分布密度函数与直接概率方法是一致的, 提出的熵参数估计方法由于是一维寻优, 所以比二维寻优的普通适线法方便, 还给出了 POME 法的几点优势: 如可利用邻近测站资料来估计本测站统计值, 可进一步对线型分布加以分析等<sup>[8]</sup>。V.P.Singh 和 A.K.Rajagopal(1987)应用 POME 建立了所谓参数空间扩张法(Parameter-space expansion method), 可用于具有有限多个能显示表达的参数的任何概率分布, 并估计了 Weibull 分布及极值 III 型分布的参数<sup>[28]</sup>。M.Fiorentino 和 K.Arora 等(1987)研究了两元极值分布的 POME 参数估计方法<sup>[29]</sup>。V.P.Singh 和 J.F.Cruise 等(1990)基于 POME 对三参数对数正态分布<sup>[30]</sup>以及 Weibull 分布<sup>[31]</sup>进行了参数估计。V.P.Singh 和 H.Guo 等(1993)以 POME 估计了三参数双对数分布<sup>[18]</sup>。V.P.Singh 和 H.Guo(1995)基于 POME 分别估计了二参数 Pareto 分布<sup>[19]</sup>, 三参数通用 Pareto 分布<sup>[20]</sup>, 二参数双对数分布<sup>[21]</sup>, 后(1997)又估计了二参数通用 Pareto 分布<sup>[22]</sup>, 以蒙特卡洛法模拟的数据为算例, 比较了 POME 法与矩法、概率权重矩法和极大似然法等多种方法, POME 法与极大似然法相当, 但计算更为简单快捷。

## 2.3 时间序列的最大熵谱分析

水文/气象时间序列分析经常遇到确定周期等问题, 而谱分析方法具有低分辨率, 选择自

相关函数最大时滞的主观性等不足。最大熵谱分析则具有频谱短且光滑, 分辨率高等独特优势。

1967年, J.P.Burg首次将POME用于频谱分析, 提出了最大熵谱分析方法(MESA)<sup>[32]</sup>。E.T.Jaynes(1982)证明了MESA与其它一些谱分析法, 如Schuster、Blackman-Tukey、极大似然法、贝叶斯及自回归(AR、ARMA或ARIMA)等模型并不冲突, 同时AR模型是MESA的特例<sup>[33]</sup>。A.R.Rao和G.Padmanabhan等(1980)比较了谱分析中的几种新近发展的方法, 表明MESA方法在水文时间序列的分析中是非常有效的<sup>[34]</sup>。黄忠恕(1983)以长江宜昌站105年年最高水位系列为对象, 探讨了波谱分析方法(包括富氏极数谱、周期图、功率谱、最大熵谱)在水文上的应用, 比较了四种谱方法分辨能力对随机序列的适应性等方面的差异, 并探讨了最大熵谱分析截止阶的确定问题<sup>[35]</sup>。R.F.Eilbert和R.A.Christensen(1983)将MESA应用于美国加州中部的年水文预测, 结论是更适于干旱年预报<sup>[36]</sup>。H.G.Pena(1983)根据P-M波谱形式模拟了海面剖面, 并用MESA建立了其波能谱。由于MESA谱估计的自由度是变化的, 波参数的稳定性要比传统的周期图和相关图谱方法好得多; 作为高频截尾函数的波参数的稳定性与传统方法得到的相同<sup>[37]</sup>。G.Padmanabhan和A.R.Rao(1986)对印度南部和中部的降雨与河道流量序列应用MESA加以研究<sup>[38]</sup>; 后(1988)将之应用到水文时间序列分析中, 与传统谱分析方法进行了比较, 不仅克服了传统方法的不足, 还可得到序列数据自相关、偏相关、相谱等随机特征, 从而将谱分析与计算和随机模型耦合到了一起<sup>[39]</sup>。P.F.Krstanovic和V.P.Singh(1987)基于MESA对多元随机洪水进行了分析<sup>[16]</sup>; 后(1991)使用之建立了单变量模型, 研究了三种情况: 前向预报、后向预报和插补预报, 将五条河流的预报结果与ARIMA模型和相空间模型的结果进行了比较; 对周期性河川径流的预报, 与ARIMA的结果相当; 但对于变差大的河川径流的预报, 单变量模型更优越<sup>[40, 41]</sup>。两人(1993)还运用MESA建立了一种实时洪水预报模型, 建模基础是描述降雨和径流系列自身和之间联系的自协方差矩阵和互协方差矩阵, 用来推导模型预报方程(分为反馈和不反馈方程两种情况), 所建模型也适于其它有关联的水文过程集对<sup>[42, 43]</sup>。N.R.Dalezios和P.A.Tyraskis(1989)基于POME将经典的Burg方法推广到多信道问题, 提出了一种新的求解多信道正规方程的谱估计递归算法, 建立了一个线性预测模型来对区域降水时间序列进行分析和预测, 结果有效可行<sup>[44]</sup>。许金殿和李立等(1992)将MESA用于大亚湾水温波动分析, 探讨了存在于海域内水温变化的显著波动周期, 夏季的波动特点以及气温和上层水温的关系<sup>[45]</sup>。

## 2.4 其他问题

在某些水文随机过程的建模方面。V.P.Singh和P.F.Krstanovic(1987)以POME研究了沉积物生成的随机模型建模问题<sup>[46]</sup>; (1988)对水质组分(磷)建立了一种随机-确定型模型, 随机部分基于POME得出<sup>[47]</sup>。P.W.Jowitt(1991)借助产流机制和流域平衡方程建立了所谓概率分布的流域模型, 以POME推导了该流域内水量的概率分布<sup>[48]</sup>。

又如在水质的预测预报评估以及地下水研究方面。A.Kusmulyono和I.Goulter(1994)基于POME提出了一种对不连续监测站点进行水质预测的新方法, 可以根据下游测站水质测值的观测变化对上游干/支流水质进行无偏预估<sup>[49]</sup>。后来, 两人(1995)讨论了应用POME在不连续站点预报水质等级的计算效应问题, 指出: 实用中应用熵理论的难题在于以离散函数逼近连续概率分布函数, 以供熵函数分析之用<sup>[50]</sup>。D.E.Barbe和J.F.Cruise等(1994)对承压以及非承压含水层中的一维稳定地下水流测压水头进行了有关研究, 以POME推导了其概率分布<sup>[51]</sup>。张成科

(1998)综合考虑了水质评价的模糊性和随机性,基于 POME 建立了水质模糊评价模型,算例表明:新模型不仅可以克服均值化的影响,而且可给出评价的可靠性<sup>[52]</sup>。

### 3 展 望

(1) 在水文水资源科学领域中的许多问题, POME 是一种前景看好的解决问题新途径。特别是将 POME 引用到风险分析和风险管理领域,风险是与不确定性联系在一起的,由于信息熵是度量、处理、分析系统不确定性的一个有效工具,风险决策中又存在众多“不适定问题”, POME 的应用具有广阔的天地。

(2) 熵是一个内涵和外延极其丰富的概念,物理熵(包括热力熵和统计力学熵)是一个物理系统无序或混乱程度的度量,信息熵则是对于信息随机不确定性程度的度量。进一步的研究,应注意水文水资源过程和熵之间建立联系,力求在物理熵和信息熵之间建立联系,以便充分发挥熵和 POME 的作用,更好地揭示和解释水文水资源规律。

(3) POME 本身尚有不少理论问题和实际计算问题,例如当熵定义在频域时, POME 一般没有显式解,即使在一维无噪数据的情况下,为求得显式解也必须对时间序列加上很强的条件:实数、因果性(causality)和最小相位(minimum - phase)。如何松弛上述显式解的条件,如何由时间序列直接估计拉格朗日乘子,如何确定滤波器的阶数等一系列问题。另外,如 POME 的快速算法问题,硬件实现问题,统计力学中的非平衡态问题,人工智能中的归纳推理问题等。

#### 参考文献:

- [1] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Phys Rev, 1957, 106: 620 - 630; 108: 171 - 190.
- [2] Singh V P. The use of entropy in hydrology and water resources[J]. Hydrological Processes, 1997, (11): 587 - 626.
- [3] Sonuga J O. Principle of maximum entropy in hydrologic frequency analysis[J]. J Hydrol, 1972, 17: 177 - 191.
- [4] Sonuga J O. Entropy principle applied to the rainfall - runoff process[J]. J Hydrol, 1976, 30: 81 - 94.
- [5] Jowitt P W. The extreme - value type - I distribution and the principle of maximum entropy[J]. J Hydrol, 1979, 42: 23 - 38.
- [6] Singh V P, Singh K. Derivation of the gamma distribution by using the principle of maximum entropy (POME) [J]. Water Resour Bulletin, 1985, 21(6): 941 - 952.
- [7] Singh V P, Singh K. Derivation of the person type (PT) III distribution by using the principle of maximum entropy[J]. J Hydrol, 1985, 80: 197 - 214.
- [8] 李元章, 丛树铮. 熵及其在水文频率计算中的应用[J]. 水文, 1985, (1): 22 - 26.
- [9] Sogawa N, Araki M, Imai T. Studies on multivariate conditional maximum entropy distribution and its characteristics[J]. J Hydrosci Hydraul Engr, 1986, 4(1): 79 - 97.
- [10] Singh V P. On the log-Gumbel (LG) distribution[J]. Hydrol, 1986, 8(4): 34 - 42.
- [11] Singh V P. On application of the Weibull distribution in hydrology[J]. Water Resour Managt. 1987, 1(1): 33 - 43.
- [12] Singh V P. On the extreme value (EV) type III distribution for low flows[J]. Hydrological Sciences J, 1987, 32(4): 521 - 533.
- [13] Singh V P, Singh K. Parameter estimation for TPLN distribution for flood frequency analysis[J]. Water Resour Bulletin, 1987, 23(6): 1185 - 1192.
- [14] Singh V P, Singh K. Parameter estimation for log-Pearson type III distribution by POME[J]. J Hydraul Engr, 1988, 114(1): 112 - 122.

- [15] 徐宗学. 熵极大识别准则及其应用[J]. 武汉水利电力学院学报, 1987, 20(6): 60 - 70.
- [16] Krstanovic P F, Singh V P. A multivariate stochastic flood analysis using entropy[A]. (Ed) Singh V P. Hydrologic Frequency Modeling[C]. D Reidel. Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands, 1987, 515 - 539.
- [17] Lind N H, Chen X. Consistent distribution parameter estimation for reliability analysis[J]. Struct Safety, 1987, 4: 141 - 149.
- [18] 马 力, 张学文. 最大熵原理与概率分布函数[J]. 数理统计与应用概率, 1993, 8(4): 78 - 84.
- [19] Singh V P, Guo H, Yu F X. Parameter estimation for 3-parameter log-logistic distribution (LLD3) by POME[J]. Stocha Hydrol Hydraul, 1993, 7(3): 163 - 177.
- [20] Singh V P, Guo H. Parameter estimations for 2-parameter Pareto distribution by POME[J]. Water Resour Magt, 1995, 9: 811 - 893.
- [21] Singh V P, Guo H. Parameter estimations for 3-parameter generalized Pareto distribution by the principle of maximum entropy (POME) [J]. Hydrol Sci J, 1995, 4: 165 - 181.
- [22] Singh V P, Guo H. Parameters estimation for 2-parameter log - logistic distribution (LLD2) by maximum entropy[J]. Civil Engr. Systems, 1995, 12: 343 - 357.
- [23] Singh V P, Guo H. Parameter estimation for 2 - parameter generalized Pareto distribution by POME[J]. Stocha Hydrol Hydraul, 1997, 11(3): 211 - 227.
- [24] 张 明. 最大信息熵理论在地貌瞬时单位线中的应用[J]. 水文, 2000, 20(3): 13 - 14, 62.
- [25] Jain D, Singh V P. Estimating parameters of EV1 distribution for flood frequency analysis[J]. Water Resour Bulletin, 1986, 22(1): 59 - 72.
- [26] Arora K, Singh V P. On statistical intercomparison of EV1 estimators by Monte Carlo simulation[J]. Advances in Water Resour, 1987, 10(2): 87 - 107.
- [27] Arora K, Singh V P. A comparative evaluation of the estimators of log - Pearson type (LP) 3 distribution[J]. J Hydrol., 1989, 105: 19 - 37.
- [28] Singh V P, Rajagopal A K. A New method of parameter estimation for hydrologic frequency analysis[J]. Hydrol Sci and Tech, 1987, 2(3): 33 - 40.
- [29] Fiorentino M, Arora K, Singh V P. The two-component extreme-value distribution for flood frequency analysis: Another look and derivation of a new estimation method[J]. Stocha Hydrol Hydraul, 1987, (1): 199 - 208.
- [30] Singh V P, Cruise J F, Ma M. A comparative evaluation of the estimators of the three-parameter lognormal distribution by Monte Carlo simulation[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 1990, 10: 71 - 85.
- [31] Singh V P, Cruise J F, Ma M. A comparative evaluation of the estimators of the Weibull distribution by Monte Carlo simulation[J]. J Statistical Computation and Simulation, 1990, 36: 229 - 241.
- [32] Burg J P. Maximum entropy spectral analysis[A] presented at the 37<sup>th</sup> Ann Int Meet Soc. Explor Geophys [C]. Oklahoma City, OK, Oct. 31, 1967.
- [33] Jaynes E T. On the rationale of maximum entropy methods[J]. Proc TEEE 1982, 70: 939 - 952.
- [34] Rao A R, Padmanahan G, Kashyap R L. Comparison of recently developed methods of spectral analysis[A]. Proc Third Int Symposium on Stochastic Hydraulics[C]. Tokyo, Japan, 1980, 165 - 175.
- [35] 黄忠恕. 波谱分析方法在水文上的应用[J]. 水文, 1983, (3): 13 - 20.
- [36] Eilbert R F, Christensen R A. Performance of the entropy minimax hydrological forecasts for California, water years 1948 - 1977[J]. J Climate Appl Meteorol, 1983, 22: 1 654 - 1 657.
- [37] Pena H G. On the stability of the moments of the maximum entropy wind wave spectrum[J]. Ocean Engr, 1983, 10 (2): 79 - 86.
- [38] Padmanabhan G, Rao A R. Maximum entropy spectra of some rainfall and river flow time series from southern and cen-

- tral India[J]. *Theo Appl Climatol*, 1986, 37: 63 – 73.
- [39] Padmanabhan G, Rao A R. Maximum entropy spectral analysis of hydrologic data[J]. *Water Resour Res*, 1988, 24(9): 1 519 – 1 533.
- [40] Krstanovic P F, Singh V P. An univariate model for long-term streamflow forecasting: I. Development[J]. *Stocha Hydrol Hydraul*, 1991, 5(3): 173 – 188.
- [41] Krstanovic P F, Singh V P. An univariate model for long – term streamflow forecasting: II. Application[J]. *Stocha Hydrol Hydraul*, 1991, 5(3): 189 – 205.
- [42] Krstanovic P F, Singh V P. A real – time flood – forecasting model based on maximum entropy spectral analysis: I. development[J]. *Water Resour Magt*, 1993, 7: 109 – 129.
- [43] Krstanovic P F, Singh V P. A real – time flood-forecasting model based on maximum entropy spectral analysis: II. application[J]. *Water Resour Magt*, 1993, 7: 131 – 151.
- [44] Dalezios N R, Tyraskis P A. Maximum entropy spectra for regional precipitation analysis and forecasting[J]. *J Hydrol*, 1989, 109: 25 – 42.
- [45] 许金殿, 李 立, 等. 大亚湾水温波动的最大熵谱分析[J]. *海洋学报*, 1992, 14(5): 26 – 33.
- [46] Singh V P, Krstanovic P F. A stochastic model for sediment yield using the principle of maximum entropy[J]. *Water Resour Res*, 1987, 23(5): 781 – 793.
- [47] Singh V P, Krstanovic P F. A stochastic model for water quality constituents[A] *Proc. 6th APD – IAHR Congress*[C]. Kyoto, Japan.
- [48] Jowitt P W. A maximum entropy view of probability – distributed catchment models[J]. *Hydrol. Sci. J.*, 1991, 36(2): 123 – 134.
- [49] Kusmulyono A, Goulter I. Entropy principles in the prediction of water quality values at discontinued monitoring stations [J]. *Stocha Hydrol Hydraul*, 1994, 8(4): 301 – 317.
- [50] Kusmulyono A, Goulter I. Computational aspects in use of entropy theory in predicting water quality levels at discontinued stations[J]. *Stocha Hydrol Hydraul*, 1995, 9(3): 215 – 237.
- [51] Barbe D E, Cruise J F, Singh V F. Derivation of a distribution for the piezometric head in groundwater flow using stochastic and statistical methods[A] (Ed) Hipel K W, *Hydrol and Environ Engr. [C]*. Vol. 2, 151 – 161, Kluwer Academic Pub., Dordrecht.
- [52] 张成科. 基于熵的水质模糊评价模型及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 1998, (6): 80 – 85.

## Principle of Maximum Entropy and Its Application in Hydrology and Water Resources

WANG Dong , ZHU Yuan-sheng

( *College of Hydrology , Water Resources and Environment , Hohai University , Nanjing 210098 , China* )

**Abstract:** The objective of this study is to introduce briefly the concept and theory of the principle of maximum entropy , and to review the state-of-the-art of its application in hydrology and water resources .

**Key words:** principle of maximum entropy; hydrology; water resources