第 13 卷 第 3 期
2002 年 5 月

水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE

Vol. 13, No. 3
May, 2002

黄河下游非恒定输沙数学模型
——I 模型方程与数值方法

张红武[1], 黄远东[1], 赵连军[2], 江恩惠[2]

(1. 清华大学水利水电工程系, 北京 100084; 2. 黄河水利委员会黄河水利科学研究院, 河南 郑州 450003)

摘要: 构建起具有通用性的黄河下游一维非恒定输沙数学模型。该模型建立了新的泥沙连续性方程与河床变形方程, 克服了以往数学模型计算中取饱和恢复系数小于 1 等缺陷, 引入了符合黄河下游河道水沙特点的水流挟沙力和河床糙率计算等公式, 给出了悬移质含沙量以及悬移质泥沙平均粒径沿横向分布的计算方法, 以及阐明了河槽在冲淤过程中河宽变化规律的模拟技术。运用 Preissmann 四点差分格式离散水流方程, 并与泥沙连续性方程进行非耦合求解。

关 键 词: 非恒定输沙; 数学模型; 黄河下游

中图分类号: TV 143^{+}.4　　文献标识码: A　　文章编号: 1001-6791(2002)03-265-06

黄河下游游荡性河段的洪水陡涨陡落、冲淤变化剧烈, 水流宽浅散乱, 同流量级水位变幅大。尤其是近十年, 随着上游水库运用和工农业用水量的增加, 进入下游河道的水沙条件发生了较大变化, 河道的冲淤规律也发生了改变, 由过去主要在滩地淤积变为泥沙集中河槽淤积, 滩槽高差缩小, 防洪形势更加严峻。为确保黄河下游的防洪安全, 除害兴利, 迫切需要利用数学模型来研究、预测黄河下游汛期洪水出现的各种问题, 为防洪决策提供技术支撑。

20 世纪 70 年代以来, 黄河泥沙数学模型得到了快速发展。但由于黄河问题的复杂性, 现有数学模型对理论上尚未解决的诸多参数, 进行了经验处理或用实测资料率定, 并用实际发生的过程对模型开展验证计算。而黄河水沙条件若发生很大变化, 那些经验性较强的参数或处理, 往往会影响新条件下的计算结果, 因而难以用来预测黄河未来冲淤趋势和发展前景。另一方面, 水流挟沙力及河床糙率是黄河泥沙数学模型应考虑的两个根本性问题, 现有模型一般都未能很好地解决这两个问题。此外, 恢复饱和系数的确定也是黄河泥沙数学模型的关键和难点所在, 现有模型的处理往往存在理论与实际相悖的矛盾。有鉴于此, 自 1995 年起, 我们开展黄河下游非恒定输沙数模的开发研究, 在发展和完善已有模型的过程中, 针对黄河下游河道输水输沙特性, 首先修正了泥沙连续性方程与河床变形方程, 而后对水流挟沙力、河床糙率、悬移质泥沙与床沙级配及其交换计算方法、含沙量及粒径沿横向分布规律、河相关系变化及模拟等基本问题, 进行了深入研究。使最终构建的模型, 不仅理论基础可靠, 而且建立的系数表达式具有通用性, 克服了许多数学模型中系数需要经常调整的缺陷, 大大提高了模型的可预测性。

1 模型方程

非恒定输沙数学模型的基本方程由描述水流运动和泥沙输移的控制方程所组成。由于泥沙数学模型的基本方程不封闭, 以及黄河下游河床冲淤演变极其复杂, 需引入一些补充关系式来

收稿日期: 2001-01-15; 修订日期: 2001-11-29

基金项目: 国家自然科学基金项目 (59890200); 水利部资助重大项目

作者简介: 张红武(1958-), 男, 河南淮阳人, 清华大学教授, 博士生导师。主要从事河流模拟相似理论及河流动力学研究。

满足方程组求解。

1.1 水流运动控制方程

对于一维非恒定水流，其控制方程为[1]

$$\frac{\partial A_i}{\partial t}+\frac{\partial Q_i}{\partial x}-q_{Li}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_{1i}\frac{Q_i^2}{A_i}\right)+\alpha_{2i}\frac{Q_i}{A_i}q_{Li}+gA_i\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x}+\frac{Q_i^2}{K_i^2}\right)=0 \tag{2}$$

式中 $i=1,2,\cdots N$，N 为横断面的总个数；Φ_i（$\Phi=Q, A, q_L\cdots$）代表第 i 个横断面上的物理量；Q 为水流量；A 为过水面积；t 为时间；x 为沿流程坐标；q_L 为河段单位长度侧向入流量；Z 为水位；g 为重力加速度；α_1 为动量修正系数；K 为断面流量模数。

1.2 泥沙输移控制方程的修正

常见的河流泥沙数学模型中的泥沙运动基本方程，是在引入泥沙同紊流脉动完全跟随、紊动扩散作用是支持泥沙悬浮的唯一动力及水平扩散对河床变形影响较小等一系列假设的条件下获得的。然而在黄河下游河道内，含沙量高、泥沙粒径变幅大、河床局部的纵横底坡并不很小，上述引入的假设已很难成立。为此，在文献［1］的基础上，重新对河流泥沙数学模型中起重要作用的河床变形方程及泥沙连续性方程进行了推演。

1.2.1 河床变形方程

设床面的内法线方向为 n，床面上方泥沙在法线方向运动速度 V_s 应等于浑水法向速度 V_n 与泥沙静水沉速 ω 在法线上的投影之和。河床与挟沙水流的界面外侧有法向速度 $\overline{V}_n$，该界面内侧有法向速度 $\overline{V}_n-V_s$。设内侧的含沙量为 s_b，床沙的干容重为 γ_0，由质量守衡定律，列出穿过界面的泥沙通量，通过时均化并引入一般对流运动的可动边界条件，得：

$$-\overline{s'_bV'_n}+\overline{s}_b\omega_b\cos(n,z)=\gamma_0\overline{V}_n \tag{3}$$

式中 $-\overline{s'_bV'_n}$ 可认为是泥沙由于紊流脉动的作用而在单位面积界面上的通量。泥沙对紊流脉动并不是完全跟随的，因此在前面引入修正系数 k_1。若采取类似于费克定律的用时均值表示的紊流扩散通量的三个分量，并为适应含沙浓度较大及泥沙较粗的实际情况，反映泥沙存在所产生的附加作用，仍需要引进相应的修正系数 k_{2x}、k_{2y}、k_{2z}，再由界面几何形状的隐式方程，写出三个方向中余弦 $\cos(n,x)$、$\cos(n,y)$、$\cos(n,z)$，则将上式中的 $-\overline{s'_bV'_n}$ 由如下关系式取代（取 $k_x=k_1k_{2x}$，$k_y=k_1k_{2y}$，$k_z=k_1k_{2z}$）：

$$\overline{s_b}\omega_b+k_z\left(\varepsilon_z\frac{\partial\overline{s}}{\partial z}\right)_b-k_x\left(\varepsilon_x\frac{\partial\overline{s}}{\partial x}\right)_b\frac{\partial Z_b}{\partial x}-k_y\left(\varepsilon_y\frac{\partial\overline{s}}{\partial y}\right)_b\frac{\partial Z_b}{\partial y}=\gamma_0\frac{\partial Z_b}{\partial t} \tag{4}$$

将沿水平扩散对河床变形的影响项直接与河床变形项成正比（引入比例系数 k_3），再认为河底泥沙扩散量主要取决于水流挟沙条件，与含沙量饱和时的下沉量成比例关系，假设河底泥沙沉速 ω_b 同水体中的泥沙平均沉速 ω 成比例关系（分别引入比例系数 k_4 及 k_5），故上式变为

$$\frac{(1+k_3)}{k_5}\gamma_0\frac{\partial Z_b}{\partial t}=\omega(\overline{s}_b-k_zk_4s_{b^*}) \tag{5}$$

式中 s_{b^*} 为饱和平衡条件下的河底含沙量。

考虑到 s_b、s_{b^*} 在实际中不易确定，为方便起见，以垂线平均含沙量 S 及垂线平均水流挟沙力 S_* 来代替为宜。于是令 $\alpha_1=s_b/S$，$\alpha_*=s_{b^*}/S_*$，代入上式，整理即得河床变形方程为

$$\gamma_0 \frac{\partial Z_b}{\partial t} = K_s \alpha_* \omega (f_s S - S_*) \tag{6}$$

其中 $K_s = k_z k_4 k_5 / (1 + k_3)$, $f_s = \alpha_1 / k_z k_4 \alpha_*$

式(6)中, f_s 主要与 α_1、α_* 有关，可称为泥沙非饱和系数; K_s 主要为考虑紊流脉动在水平产生的扩散作用及泥沙存在产生的附加影响而引入的修正系数，称为附加系数。

1.2.2　泥沙连续方程

以积分形式表示的一维非恒定泥沙输移连续性方程为[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A S\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial x}\int_A SV\,\mathrm{d}A + \int_B \gamma_0 \frac{\partial Z_b}{\partial t}\mathrm{d}B - S_L q_L = 0 \tag{7}$$

将式(6) 代入式(7) 可得到:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A S\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial x}\int_A SV\,\mathrm{d}A + \int_B K_s \alpha_* \omega (f_s S - S_*)\,\mathrm{d}B - S_L q_L = 0 \tag{8}$$

将每一个横断面划分成若干个子断面，于是式(6) 与式(8)可分别写成:

$$\frac{\partial Z_{bij}}{\partial t} - \frac{K_{sij}\alpha_{*ij}}{\gamma_0}\omega_{ij}(f_{sij}S_{ij} - S_{*ij}) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_i S_i) + \frac{\partial (A_i V_i S_i)}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m}(K_{sij}\alpha_{*ij} f_{sij} b_{ij} S_{ij}\omega_{ij}) - \sum_{j=1}^{m}(K_{sij}\alpha_{*ij} b_{ij} S_{*ij}\omega_{ij}) - S_{Li}q_{Li} = 0 \tag{10}$$

式中　Φ_{ij} ($\Phi = K_s, \alpha_*, f_s \cdots$)为 i 断面上第 j 个子断面处的物理量; B 为水面宽度; b 为子断面宽; S 为含沙量; S_L 为河段单位长度侧向入流的含沙量; V 为水流速度; Z_b 为河床高程; ω 为泥沙浑水沉速; γ_0 为淤积物干容重; S_* 为水流挟沙力; α_* 为平衡含沙量分布系数，由下式计算[2]:

$$\alpha_* = \frac{1}{N_0}\exp\left(8.21\frac{\omega}{\kappa u_*}\right) \tag{11}$$

其中

$$N_0 = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{g}}{c_n C}, \eta\right)\exp\left(5.33\frac{\omega}{\kappa u_*}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{\eta} - 1}\right)\mathrm{d}\eta$$

式中　κ 为卡门常数; c_n 为涡团参数 ($c_n = 0.375\kappa$); C 为谢才系数; u_* 为摩阻流速; 且有:

$$f\left(\frac{\sqrt{g}}{c_n C}, \eta\right) = 1 - \frac{3\pi\sqrt{g}}{8c_n C} + \frac{\sqrt{g}}{c_n C}\left(\sqrt{\eta - \eta^2} + \arcsin\sqrt{\eta}\right) \tag{12}$$

K_s 目前还只能当做一个综合修正系数来处理。运用量纲分析及相似转化原理，并根据动床河工模型试验，可导得 K_s 的表达式为:

$$K_s = \frac{1}{2.65}\kappa^{4.5}\left(\frac{u_*^{1.5}}{V^{0.5}\omega}\right)^{1.14} \tag{13}$$

对于非饱和系数 f_s，通过归纳分析，再借助试验资料，得出:

$$f_s = (S/S_*)^{[0.1/\mathrm{arctg}(S/S_*)]} \tag{14}$$

1.2.3　几个基本问题的处理

(1) 水流挟沙力的计算　开发黄河下游输沙数学模型，必须考虑洪水期河道的冲淤过程，特别在高含沙洪水下，河道冲淤变幅相当大，对洪水位的影响显著。已有的数学模型尚难适合于黄河高含沙洪水情况，即使是一般洪水，经率定调整后的恢复饱和系数也远小于 1。这种理论与实际相悖的主要根源在于模型中引用的水流挟沙力公式计算的 S_* 偏小，从而 $|S - S_*|$ 在黄河常出现的水沙条件下偏大，为使河床淤积量不致过大，只有将与 $|S - S_*|$ 相乘的恢复饱和系数取得更小一些。因此，为保证本模型能较好的模拟黄河下游河道的输沙特性，采用张红

武[3]的水流挟沙力公式，即

$$S_* = 2.5\left[\frac{(0.0022+S_V)V^3}{\kappa\dfrac{\gamma_s-\gamma_m}{\gamma_m}gh\omega}\ln\left(\frac{h}{6D_{50}}\right)\right]^{0.62} \tag{15}$$

式中 S_V 为体积比含沙量；D_{50}为床沙中径；h 为水深；κ、ω、γ_m 分别为浑水卡门常数、泥沙在浑水中的沉速及浑水容重，它们可依次由以下三式计算：

$$\kappa = 0.4 - 1.68(0.365 - S_V)\sqrt{S_V} \tag{16}$$

$$\omega = \omega_0(1-1.25S_V)\left[1-\frac{S_V}{2.25\sqrt{d_{50}}}\right]^{3.5} \tag{17}$$

$$\gamma_m = \gamma + \frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}S \tag{18}$$

式(16)~(18)中，γ 为水流容重；γ_s 为泥沙容重；S 为含沙量；ω_0 为非均匀沙在清水中的沉速；d_{50}为悬移质泥沙中径（mm）。

清华大学舒安平[4]、武汉水利电力大学陈雪峰等[5]通过大量实测资料检验，证明公式(15)是目前最适合于黄河、长江等天然河流的水流挟沙力公式，且该公式在近期改编的教科书中被推荐为适用于高含沙水流的公式[6]，再者，式(15)计算的属全悬移质挟沙力，不需人为对床沙质及冲泻质加以区分。

(2) 河床糙率的模拟　为使模型的水流计算既能反映水力泥沙因子的变化对摩阻特性的影响，又反映天然河道中各种附加糙度的影响，采用赵连军、张红武糙率的计算公式[7]：

$$n = \frac{h^{1/6}}{\sqrt{g}}\left[\frac{c_n\dfrac{\delta_*}{h}}{0.49\left(\dfrac{\delta_*}{h}\right)^{0.77}+\dfrac{3\pi}{8}\left(1-\dfrac{\delta_*}{h}\right)\left[\sin\left(\dfrac{\delta_*}{h}\right)^{0.2}\right]^5}\right] \tag{19}$$

河滩上的摩阻厚度 δ_*，即为当地糙度，可由滩地植被情况确定。而在主槽内，沙波尺度及沙波波速对摩阻特性有较大影响。对这一复杂影响过程，目前只能给予综合考虑。根据动床模型试验资料，建立了 δ_* 与 Froude 数 Fr（$Fr = V/\sqrt{gh}$）等因子之间的经验关系，即：

$$\delta_* = D_{50}\left\{1+10^{\left[8.1-13Fr^{0.5}(1-Fr^3)\right]}\right\} \tag{20}$$

(3) 悬移质含沙量横向分布计算　河道冲淤的横向分布直接影响河道的输水输沙特性，黄河下游特别是游荡性河段，滩地上存在着明显大于河床纵比降的横比降。根据实体模型试验结果，水流上滩伊始，漫滩水流侧向流速可大于 1.5 m/s。因此，泥沙数模计算中需专门考虑滩槽含沙量之间的交换关系。

由于目前对于滩槽水沙交换模式的确切定量描述很不成熟，因此，建立含沙量沿横向的分布公式，以取代滩槽沙量交换的具体计算。通过对黄河大量实测资料进行分析，建立了如下含沙量沿横向分布公式[8]：

$$S_{ij}/S_i = C_1(h_{ij}/h_i)^{\left(0.1-1.6\frac{\omega}{\kappa u_*}+1.3S_{Vi}\right)}(V_{ij}/V_i)^{\left(0.2+2.6\frac{\omega}{\kappa u_*}+S_{Vi}\right)} \tag{21}$$

式中 V_i、V_{ij} 分别为断面平均及任意一点的流速；h_i、h_{ij} 分别为断面平均及任意点的水深；u_* 为断面平均摩阻流速；C_1 为 1 左右的断面形态系数，由沙量守衡可求得：

$$C_1 = \frac{Q_i}{\int_a^b q_{ij}(h_{ij}/h_i)^{\left(0.1-1.6\frac{\omega}{\kappa u_*}+1.3S_{Vi}\right)}(V_{ij}/V_i)^{\left(0.2+2.6\frac{\omega}{\kappa u_*}+S_{Vi}\right)}\mathrm{d}y} \tag{22}$$

式中　q_{ij} 为断面任一点单宽流量；y 为横向坐标；a、b 为断面河宽两端点起点距$(b>a)$。

(4) 悬移质泥沙平均粒径横向分布计算　天然河流中不仅含沙量沿横向分布存在差异，悬移质泥沙级配沿横向的分布也不均匀，通过对黄河下游实测资料回归得出如下悬沙平均粒径沿横向分布公式[8]：

$$\frac{d_{cpij}}{d_{cpi}} = C_2\left(\frac{S_{ij}}{S_i}\right)^{0.6}\left(\frac{V_{ij}}{V_i}\right)^{0.1} \tag{23}$$

式中　d_{cpi} 为断面平均悬沙平均粒径；d_{cpij} 为断面上任一点悬沙平均粒径；C_2 为断面形态系数，由沙量守衡可求得：

$$C_2 = \frac{Q_iS_i}{\int_a^b\left[q_{ij}S_{ij}\left(\frac{S_{ij}}{S_i}\right)^{0.6}\left(\frac{V_{ij}}{V_i}\right)^{0.1}\right]\mathrm{d}y} \tag{24}$$

(5) 河槽在冲淤过程中宽度变化规律的模拟　黄河下游河道随来水来沙的变化而不断地进行自身调整。这种调整不仅反映在纵向形态的调整，而且横向形态的变化也非常剧烈。通过黄河下游实测资料分析与物理模型试验观测，发现当河槽处于冲刷状态时，在河床冲深下切的同时，由于弯道环流等作用的影响，还伴随着河槽两岸的塌滩，河槽将发生一定程度的展宽，而河道发生淤积时，因主河槽内靠近滩边的水流流速较小，水流挟沙能力小，淤积强度明显大于主流区，使得河槽在淤高抬升的过程中伴随着河槽缩窄。当洪水漫滩行洪之后，滩槽之间的水沙交换规律变得更为复杂，河槽横向的变化也更为剧烈。显然若仅通过划分子断面来区分滩槽，因子断面划分数目有限，将很难模拟断面形态的变化规律，从而会直接影响洪水位及洪水传播过程的模拟精度。本模型所采用的模拟河槽宽度变化过程的方法，是根据计算河段受特定的河相关系均衡调整原理进行的。模拟河段内各横断面宽度修正值，除受到给定河岸条件的限制外(例如受到抗冲河岸、山嘴及河道整治工程等的限制)，还要随着河流造床过程而自动调整。本模型选用张红武河床综合稳定性指标作为河相关系均衡调整准则计算，即

$$\frac{\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}D_{50}H\right)^{\frac{1}{3}}}{iB^{2/3}} = \xi_* \tag{25}$$

式中　i 为河床比降；ξ_* 由不同河段的实测资料进行率定，并在计算过程中实现自动调整。

2　数值求解方法

模型方程求解采用非耦合方法，即先单独求解水流运动，再求解泥沙连续性方程。

采用 Preissmann 格式对式(1)、(2)进行离散。对 t 的微商取相邻结点上向前时间差商的平均值，对 x 的微商则取相邻两时间层向前空间差商的加权平均值。对于网格中的 M 点，令：

$$f(M) = \frac{(1-\theta)(f_i^n+f_{i+1}^n)+\theta(f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1})}{2},\quad \frac{\partial f(M)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}-f_i^n-f_{i+1}^n}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = \frac{\theta(f_{i+1}^{n+1}-f_i^{n+1})+(1-\theta)(f_{i+1}^n-f_i^n)}{\Delta x_i} \tag{26}$$

其中f 为任一函数，f_i^n 为$f(x_i, t_n)$；θ为权因子，其值为小于或等于1的正数。

依照式(26)得到式(1)、(2)的离散式。在给定了初始条件及边界条件后，采用追赶法对离散的水流控制方程进行迭代求解。

式(10)采用全隐式离散，给定进口条件后，即可求出各断面在 $n+1$ 时刻的平均含沙量。再将断面平均含沙量分配到各个子断面上，各个子断面的河床变形式(9)即可离散为

$$Z_{bij}^{n+1} = Z_{bij}^{n} + \Delta t \frac{K_{sij}\alpha_{*ij}}{\gamma_0} \omega_{ij}(f_{sij}S_{ij}^{n+1} - S_{*ij}^{n+1}) \tag{27}$$

上式计算结果即为各断面 $n+1$ 时刻河床冲淤变形后的高程。

参考文献:

[1] 谢鉴衡. 河流模拟[M]. 北京: 水利电力出版社, 1990.

[2] 张红武, 张俊华, 江恩惠, 等. 工程泥沙研究与实践[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 1993. 119–120.

[3] 张红武, 江恩惠, 等. 黄河高含沙洪水模型的相似律[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1994. 69–71.

[4] 舒安平. 水流挟沙力公式的验证与评述[J]. 人民黄河, 1993, (1): 25–29.

[5] 陈雪峰, 陈 立, 李义天. 高中低浓度挟沙水流挟沙力公式的对比分析[J]. 武汉水利电力大学学报, 1999, (5): 1–5.

[6] 张瑞瑾, 谢鉴衡, 等. 河流泥沙动力学[M]. 北京: 水利电力出版社, 1998. 205–206.

[7] 张红武. 河流动力学研究[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 1999. 44–46.

[8] 赵连军, 江恩惠, 张红武. 悬移质泥沙含沙量及悬沙平均粒径沿横响分布规律研究[A]. 第十三届水动力学研讨会论文集[C]. 北京: 海洋出版社, 1999. 68–75.

A mathematical model for unsteady sediment transport in the lower Yellow River, Ⅰ, model equations and numerical method*

ZHANG Hong-wu[1], HUANG Yuan-dong[1], ZHAO Lian-jun[2], JIANG En-hui[2]

(1. *Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*;

2. *Institute of Hydraulic Research, YRCC, Zhengzhou* 450003, *China*)

Abstract: A one-dimensional mathematical model for unsteady sediment transport in the lower Yellow River is developed. In the model, the formulas of sediment carrying capacity and Manning roughness coefficient, which can reflect the features of two-phase flows in the Yellow River, are adopted. A saturation recovery coefficient is defined to represent the ratio between the bottom and the average concentration under the balance conditions, which is not a constant in this model and is evaluated by using an empirical expression obtained by integrating the sediment concentration along water depth. The concentration distributions and the mean diameter distributions of suspended sediment in the transversal direction are also estimated in this model. The Preissmann four-point infinite difference scheme and algorithm for Tridiagonal Matrix Eqs. are employed in the numerical method.

Key words: unsteady sediment transport; mathematical model; the lower Yellow River

* The project is supported by National Natural Science Fund of China (No. 59890200).