

Jensen 模型水分敏感指数的新定义及其解法

丛振涛, 周智伟, 雷志栋

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

摘要: 在总结已有的作物水分生产函数 Jensen 模型研究工作的基础上, 针对以往研究中水分敏感指数与生育阶段划分密切相关的问题, 对 Jensen 模型进行了改造, 提出了水分敏感指数的新定义。并在 Jensen 模型水分敏感指数的累加性分析的基础上, 提出了确定 Jensen 模型水分敏感指数及累积曲线的更为简洁的新方法, 新方法得到了田间试验的验证并与传统方法有很好的一致性。

关键词: Jensen 模型; 水分敏感指数; 作物水分生产函数

中图分类号: S 152.7⁺5 文献标识码: A 文章编号: 1001-6791(2002)06-730-06

1 Jensen 模型

作物水分生产函数反映了作物产量(或生物量)与供水状况之间的函数关系。Jensen 模型是应用较为广泛的作物水分生产函数之一, 其表达式为

$$\frac{Y_a}{Y_m} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{ET_{ai}}{ET_{mi}} \right)^i \quad (1)$$

式中 n 为划分的作物生育期阶段数; i 为作物生育期阶段编号; ET_{ai} 为第 i 生育阶段的实际蒸腾量(mm); ET_{mi} 为第 i 生育阶段的潜在蒸腾量(mm); Y_a 为实际蒸腾量对应的作物实际产量(kg/hm²); Y_m 为潜在蒸腾量对应的作物潜在产量, 即充分供水条件下的作物产量(kg/hm²); i 为第 i 生育阶段的水分敏感指数, 反映阶段缺水对产量的影响程度^[1,2]。

2 已开展的研究工作

在已经开展的工作中, 通常采用如下的方法确定水分敏感指数:

将作物生育期分为 n 个生育阶段(通常为 4~6 个), 田间试验包括 m 个处理。对于每个处理, 由实测资料确定实际产量 Y_a 以及每个阶段的实际蒸腾量 ET_{ai} 与潜在蒸腾量 ET_{mi} 。

目标函数为 $\min \prod_{j=1}^m ss_j^2$, 其中 $ss_j = \left| \left[\frac{Y_a}{Y_m} \right]_j - \prod_{i=1}^n \left(\frac{ET_{ai}}{ET_{mi}} \right)_j^i \right|, j = 1, 2, \dots, m$ (2)

经过非线性优化得到潜在产量 Y_m 以及各个生育阶段的 i , 在此基础上, 根据得到各生育

收稿日期: 2001-09-28; 修订日期: 2001-12-31

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (59839320)

作者简介: 丛振涛(1973-), 男, 辽宁瓦房店人, 清华大学水利水电工程系博士生, 主要从事水文水资源方面的研究。

阶段的水分敏感指数，确定对水分比较敏感的生育阶段，进而指导灌溉制度的制定。

已经开展的研究工作存在的主要问题是水分敏感指数的大小取决于生育阶段的划分，一般来说，生育阶段愈长，水分敏感指数愈大。在实际的试验或生产中，统一划分生育阶段困难较大。因此在不同的研究中，生育阶段的划分一般说来是不同的，这使得不同研究工作中的水分敏感指数可比性较差。王仰仁(1995)^[3]、荣丰涛(1997)^[4]、梁银丽(2000)^[5]等根据以上研究方法，采用 Jensen 模型对冬小麦的水分敏感指数开展的研究中，就分别将整个生育期划分成 6 个、5 个和 4 个生育阶段，得到的水分敏感指数差异很大。

作物水分生产函数的应用价值在于通过田间试验确定水分敏感指数，据此制定灌溉制度实现节水灌溉，因此要求水分敏感指数的稳定性，包括针对不同年份的稳定性、不同地域的稳定性以及针对不同灌水条件的稳定性。水分敏感指数大小依赖于生育阶段的划分，直接导致了水分敏感指数的时域不稳定性，给作物水分生产函数的使用的推广带来了很大困难。这也是目前无法建立相对统一的水分敏感指数体系的重要原因之一。

3 水分敏感指数的新定义及累加性分析

为了克服生育阶段划分对水分敏感指数的大小的影响，重新构造 Jensen 模型如下：

$$\frac{Y_a}{Y_m} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{ET_{ai}}{ET_{mi}} \right)^{T_i} \tag{3}$$

式中 T_i 为第 i 阶段所包含的天数； i 的单位为 1/d。

按照水分敏感指数的新定义，对应不同的生育阶段划分，仍然会有不同的水分敏感指数。为了使不同方式划分生育阶段的水分敏感指数具有可比性，需要进一步分析不同生育阶段划分对应的水分敏感指数之间的联系。

某种作物的生育期共有 N 天，采取两种方法划分生育阶段。一种是将生育期内每一天作为一个生育阶段，共 N 个生育阶段，对应 N 个水分敏感指数 i_1, i_2, \dots, i_N ，此时 $T_i = 1$ ；另一种方案是将其中的第 i 天到第 $i+k$ 天合并，共 $N-k$ 个生育阶段，对应 $N-k$ 个水分敏感指数 $i_1, i_2, \dots, i_{i-1}, i_{kk}, i_{i+k+1}, \dots, i_N$ 。不同的阶段划分对产量没有影响，根据 Jensen 模型，可以得到

$$\prod_{l=i}^{i+k} \left(\frac{ET_{al}}{ET_{ml}} \right)^l = \left(\frac{\sum_{l=i}^{i+k} ET_{al}}{\sum_{l=i}^{i+k} ET_{ml}} \right)^{kk \cdot (k+1)} \tag{4}$$

如果存在 $(k+1) i_{kk} = \sum_{l=i}^{i+k} i_l$ ，即水分敏感指数存在累加性，就可以在不同的生育阶段划分基础上得到的水分敏感指数进行换算比较，也可以根据每天的水分敏感指数推求任意阶段划分的水分敏感指数。根据后一种思路，郭群善(1994)^[6]、王仰仁(1997)^[7]等分别提出了水分敏感指数累积曲线的方法。该方法将水分敏感指数累积值 z 与时间 t 建立函数关系，并构造了不同的 $z(t)$ 形式，从而可以推求每天的水分敏感指数及任意阶段划分的水分敏感指数。

水分敏感指数的累加性无法从理论上加以证明，下面先分析其两日累加性。

对于连续的两日，根据式(4)，存在

$$\left(\frac{ET_{a1}}{ET_{m1}} \right)^1 \cdot \left(\frac{ET_{a2}}{ET_{m2}} \right)^2 = \left(\frac{ET_{a1} + ET_{a2}}{ET_{m1} + ET_{m2}} \right)^2 \tag{5}$$

令 $ET_{a1} = k_{s1} ET_{m1}$, $ET_{a2} = k_{s2} ET_{m2}$, $k_{s2} = k_{s1}$, $ET_{m2} = ET_{m1}$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $ET_{a2} = ET_{a1}$, 其中 k_{s1} 、 k_{s2} 为土壤水分系数, 与土壤水分状况有关, α_1 、 α_2 为参数。

$$\text{从式(5)可得} \quad 2_{12} = \alpha_1 \frac{\ln k_{s1} + \ln(1 + k_{s1})}{\ln \left[k_{s1} \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 k_{s1}} \right]} \quad (6)$$

$$\text{令式(5)的左端 } Y_1 = (k_{s1})^{\alpha_1} (k_{s2})^{\alpha_2}, \text{右端 } Y_2 = \left[k_{s1} \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 k_{s1}} \right]^{2_{12}} \quad (7)$$

k_{s1} 的取值范围为 0~1.0, 当 k_{s1} 接近 0 的时候, 从式(6)可以得到 2_{12} 比较接近 $(\alpha_1 + \alpha_2)$; 当 k_{s1} 接近 1.0 的时候, 从式(7)可以得到 2_{12} 与 $(\alpha_1 + \alpha_2)$ 之间的差异对 Y_1 、 Y_2 的大小影响不大; 因此可以初步判断, 以 $(\alpha_1 + \alpha_2)$ 代替 2_{12} , Y_1 、 Y_2 基本上相等, 即式(5)基本上成立。下面, 再从数值计算加以验证。

各参数的取值范围如表 1, 相对误差记为 $Err = |Y_1 - Y_2| / [(Y_1 + Y_2) / 2]$ 。

共得到 30240 个 Err , 其平均值为 0.27%, 标准方差为 0.43%, 最大值为 2.37%, 95.4% 的 Err 在 1.0% 以下, 99.9% 的 Err 在 2.0% 以下。因此可以认为, 在一般情况下, $2_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$ 是近似成立的, 即水分敏感指数存在近似的两日累加性。

多日的累加性将在下面通过实例加以验证。如果水分敏感指数具有累加性, 水分敏感指数的大小就与生育阶段的划分没有直接的关系, 不同方式划分生育阶段的水分敏感指数具有了可比性, 这对研究水分敏感指数的时域稳定性具有重要意义。

表 1 各参数取值范围

Table 1 Ranges of the parameters		
参数	取值范围	计算步长
$\alpha_1(1/d)$	0.001~0.021	0.004
k_{s1}	0.1~1.0	0.15
	0.9~3.0	0.3
	0.3~3.0	0.3
	0.5~2.1	0.2

4 水分敏感指数的新解法

从水分敏感指数的新定义及两天累加性出发, 可以得到水分敏感指数的一种新解法。将生育期内每一天作为一个生育阶段, 如果生育期共有 N 天, 则可以得到 N 个生育阶段, 对应 N 个水分敏感指数, 此时 $T_i \geq 1$ 。根据水分敏感指数的累加性, 存在

$$\left(\frac{ET_{ak}}{ET_{mk}} \right)^k \cdot \left(\frac{ET_{a,k+1}}{ET_{m,k+1}} \right)^{k+1} = \left(\frac{ET_{ak} + ET_{a,k+1}}{ET_{mk} + ET_{m,k+1}} \right)^{k+k+1} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

令 $ET_{ak} = k_{sk} ET_{mk}$, $ET_{a,k+1} = k_{s,k+1} ET_{m,k+1}$, $k_{s,k+1} = k_{sk} k_{sk}$, $ET_{m,k+1} = k_{sk} ET_{mk}$, $k_{k+1} = k_{sk} k_{sk}$, $ET_{a,k+1} = k_{sk} k_{sk} ET_{ak}$, 各参数意义同前。则式(8)可以化为

$$\left(\frac{k_{sk}}{k_{k+1}} \right)^{k+1} = \left(\frac{1 + k_{sk} k_{sk}}{1 + k_{sk}} \right)^{k+k+1} \quad (9)$$

因此有
$$k_{k+1} = k_{sk} \frac{\ln \left(\frac{1 + k_{sk} k_{sk}}{1 + k_{sk}} \right)}{\ln(k_{sk}) - \ln \left(\frac{1 + k_{sk} k_{sk}}{1 + k_{sk}} \right)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

这样就建立了 k_{si} 之间的递推关系, 由此可依次推出 $k_{si} (i = 2, 3, \dots, N)$ 与 k_{s1} 的关系。令 $k_{si} = k_{s1} / \alpha_i$, 由于实际产量 Y_a 以及每天的 k_{si} 可由实测资料直接或间接获得, 如果 Y_m 已知, 则 α_i

的计算表达式为

$$i = \frac{\ln(Y_a / Y_m)}{\sum_{i=1}^N i \ln(k_{si})} \tag{11}$$

于是， $i (i = 1, 2, \dots, N)$ 可求。在此基础上就可以构建 i 的累积曲线 $z(t)$ ，并进一步确定 $z(t)$ 的形式与参数。这样，通过一个小区的田间试验就可实现水分敏感指数的计算，也可通过多个小区优化后确定水分敏感指数。

5 算 例

应用以上方法，对北京永乐店试验站 1999 - 2000 年冬小麦试验进行分析。该试验站共有 30 个试验小区 (A ~ F 六行, 1 ~ 5 五列)，采取了不同的灌溉与施肥处理。

选取合适的小区对于准确确定水分敏感指数比较重要，从本文对两天累加性的分析，可以得出这样的结论：水分状况比较稳定 (如未进行灌溉)，可以得到较好的两天累加性。因此，选用水分亏缺最为严重 (未灌溉) 的 A4 小区确定水分敏感指数。

根据水量平衡分析确定实际蒸腾量 ET_{ai} 与潜在蒸腾量 ET_{mi} 。A4 小区的产量 Y_a 为 3 182.3 kg/hm²，选取相同施肥处理产量最高的 F4 小区的产量 5 625.0 kg/hm² 作为 Y_m 。根据以上计算水分敏感指数的新方法，可以得到 $i = 0.005 (1/d)$ ，进一步得到 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。

这种新方法虽然从机理上保证了 Jensen 模型任意连续两天的累加性，并不能保证更多连续天数的累加性。对于连续 m 天，我们希望存在

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{ET_{ai}}{ET_{mi}} \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^m ET_{ai}}{\sum_{i=1}^m ET_{mi}} \right)^{\sum_{i=1}^m i} \tag{12}$$

对于 A4 小区的试验数据，分别以 $m = 3, m = 10, m = 30$ 进行验证，式 (12) 两端的计算值分别平均相差 0.00001 %、0.0019 % 和 0.0778 %，最大也不超过 0.5 %。因此，在两天累加性基础上确定的水分敏感指数具有很好的更多天数的累加性。

$i (i = 1, 2, \dots, N)$ 已知，在此基础上，可进一步求解水分敏感指数的累积曲线。在王仰仁等^[7]提出的累积曲线形式的基础上，采用式 (13) 的累积曲线形式

$$z(t) = \frac{c}{1 + e^{-a \cdot bt}} - z_0 \tag{13}$$

式中 $z(t)$ 为水分敏感指数累积值， $z(t) = \sum_{t=0}^t (t)$ ； t 为时间 (d)，这里只研究返青后的情况，所以从返青期开始计算； $a、b、c$ 及 z_0 为待定参数。

经过非线性优化求解，可以得到 $a = 2.51, b = 0.0521, c = 1.035$ ，累积曲线见图 1。与王仰仁等^[7]得到的参数 ($a、b、c$ 分别为 4.28、0.0571、0.7728) 相比，略有差异。将自返青至收割 (3 月 15 日 ~ 6 月 10 日) 共 88 d，粗略按照返

表 2 水分敏感指数计算结果

Table 2 Calculated results of the water sensitive index

阶段	T	$i (1/d)$
返青期	0.129	0.0059
拔节期	0.251	0.0114
抽穗期	0.281	0.0128
灌浆期	0.178	0.0081

由累积曲线得到水分敏感指数如表 2。

其中， T 与原来意义的水分敏感指数的含义相同。与荣丰涛^[4]、梁银丽^[5]、王仰仁等^[7]开展的研究进行对比，这种确定水分敏感指数的

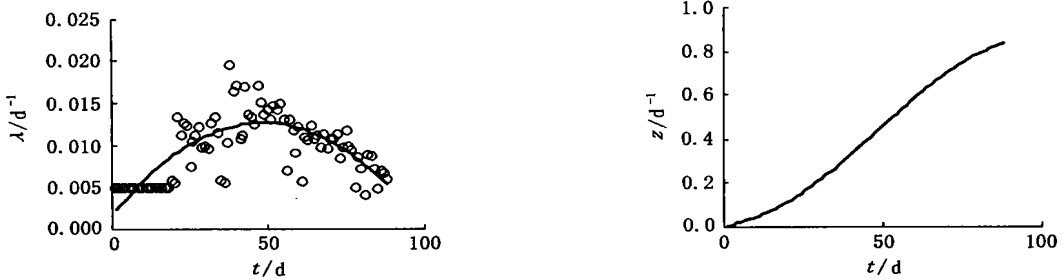


图1 水分敏感指数及累积曲线

Fig. 1 Water sensitive index and its cumulation curve

新方法与传统方法的结论基本吻合，验证了新方法的合理性。

将根据B4小区得到的水分敏感指数应用到其他小区， Y_m 仍取F4小区的产量，得到各小区的产量与实际产量的对比见图2。

结果表明，由一个小区确定的水分敏感指数基本上适用于其他小区，具有一定的稳定性。

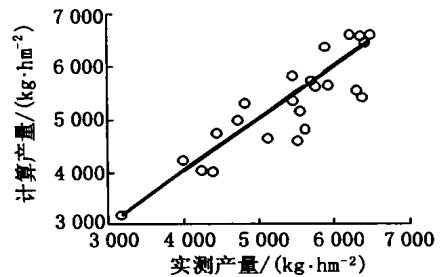


图2 计算产量与实测产量比较

Fig. 2 Comparison of the calculated and measured yield

6 结 论

(1) 水分敏感指数的新定义 通过对 Jensen 模型的改造，得到了水分敏感指数的新定义。新定义的重要意义在于使水分敏感指数不再依赖于生育阶段的划分，具有更大范围的可比性，为确定具有时域稳定性的水分敏感指数创造了条件。

(2) 水分敏感指数的新解法 从 Jensen 模型的两日累加性出发，得到了确定水分敏感指数的新方法。计算表明，根据两日累加性得到的水分敏感指数可以基本上保证多日累加性。新方法与传统方法有很好的一致性，新方法的优点在于从机理上保证了水分敏感指数的累加性，同时从一个样本出发就可以得到水分敏感指数，具有更大的实用性。

(3) 水分敏感指数的应用 通过对水分敏感指数的计算分析，从中可以得出这样的结论：冬小麦的拔节期与抽穗期水分敏感指数较大，此阶段的水分亏缺状况对冬小麦的最终产量影响较大。从灌溉制度上应保证这一阶段的供水。

参考文献：

- [1] 沈荣开, 张瑜芳, 等. 作物水分生产函数与农田非充分灌溉研究述评[J]. 水科学进展, 1995, 6(3): 248 - 254.
- [2] 彭世彰, 边立明, 朱成立. 作物水分生产函数的研究与发展[J]. 水利水电科技进展, 2000, (1): 17 - 20.
- [3] 王仰仁. 冬小麦田间水分转化及水分生产函数研究[D]. 北京: 清华大学, 1995.

- [4] 荣丰涛, 王仰仁. 山西省主要农作物水分生产函数中参数的试验研究[J]. 水利学报, 1997, (1): 78 - 83.
- [5] 梁银丽, 山 仑, 康绍忠. 黄土旱区作物-水分模型[J]. 水利学报, 2000, (9): 86 - 90.
- [6] 郭群善, 雷志栋, 等. 冬小麦水分生产函数 Jensen 模型水分敏感指数研究[J]. 水科学进展, 1996, 7(1): 20 - 25.
- [7] 王仰仁, 荣丰涛, 等. 水分敏感指数累积曲线参数研究[J]. 山西水利科技, 1997, (11): 20 - 24.

New definition and computation on the water sensitive index in Jensen model

CONG Zhen-tao, ZHOU Zhi-wei, LEI Zhi-dong

(*Department of Hydraulic and Hydropower Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract: In the past research, the water sensitive indexes greatly depend on the partition of the growing stages. To solve the problem, the Jensen model is rebuilt and the water sensitive index is redefined. A terse new method computing the water sensitive index is introduced according as the water sensitive indexes are able to accumulate. The practical field experiment validates that the new method is well consistent with the old those.

Key words: Jensen model; water sensitive index; crop-water production function