激光测速粒子对复杂流动的响应研究

──II 典型流场中粒子跟随性的数值分析

黄社华1,魏庆鼎2

(1. 武汉大学水利水电学院,教育部水沙科学重点实验室,湖北 武汉 430072;

2 北京大学湍流国家重点实验室,北京 100871)

摘要:以修正后适用于高颗粒雷诺数的粒子非恒定运动方程为基础,将该方程无量纲化,定义了一般流场中粒子跟 随性的概念,给出了粒子跟随性的数学表述。据此对典型流场中粒子的运动进行了数值计算,并定量分析了粒径、 密度等参数对不同流动中示踪粒子跟随特性的影响。

关键 词: 粒子跟随性; 瞬变运动方程; 数值计算

中图分类号: 0 359 文献标识码: A 文章编号: 1001-6791(2003)01-028-08

在研究了流场中刚性球形粒子的非恒定运动方程并构造了相应的数值计算方法后,对有关流场中粒子的跟随性进行定量的计算研究。由于实际流动的复杂性,不能表达为具体的已知函数,而求解粒子运动方程要求背景流场为已知条件,对于这一问题,我们设想根据流体运动的基本属性进行流动分解,即按瞬时脉动、剪切旋涡运动等特性,选定几种部分具有这类性质的已知流场,计算其中刚性粒子跟随流体的运动特性。关于粒子跟随性的概念,对于某一物理参数的粒子而言,以往的研究主要是指粒子相对流体运动速度随时间变化的关系。 在流体力学实验研究中,通过流动显示可以揭示复杂流动结构。随着激光测速技术的快速发展,示踪粒子定量流动显示,即PIV 技术已能够获得流场瞬时结构的信息,这对湍流实验研究而言是特别重要的。因此,粒子的跟随性应包括粒子相对速度随流场空间尺度的变化关系,以及粒子运动迹线与恒定或准恒定流线的相对关系。

本文以高颗粒雷诺数下粒子的非恒定运动方程为基础,取时间、密度和速度作为基本特征参数对方程进行 无量纲化,引入一般流场中粒子跟随性的概念,进而给出粒子跟随性的数学表述。据此对均匀振荡流、自由涡 和 Stuart 涡等典型流动中粒子的运动进行数值计算,给出粒子相对速度随时间或空间尺度的定量变化关系,并 分析粒径、密度等参数对不同流动中示踪粒子跟随特性的影响。

1 方程的无量纲化与粒子跟随性的数学表述

高雷诺数下粒子非恒定运动方程为[1,2]

$$\frac{1}{6}\pi D^{3} \rho_{s} \frac{\mathrm{d}u_{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{6}\pi D^{3}(\rho_{s} - \rho_{r})f + c_{1}3\pi \Psi D(u - u_{p}) + \frac{\pi}{6}D^{3} \rho_{r} \frac{Du}{Dt} + \Delta_{4} \frac{1}{6}\pi D^{3} \rho_{r} \frac{\mathrm{d}(u - u_{p})}{\mathrm{d}t} + \Delta_{H} \left(\frac{D}{2}\right)^{2} \sqrt{2\pi\rho_{r}} \mu_{0} \int_{0}^{t} \frac{\mathrm{d}(u - u_{p})/\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t - \tau}} \mathrm{d}\tau + C_{LSK_{s}} \Psi D^{2} + \xi/v + {}^{0.5}(v - v_{p})$$
(1)

式中 $c_{1}=1+Rep^{0.687}$ 为准恒定 Stokes 阻力修正系数,采用标准阻力曲线拟合经验系数。非恒定阻力的修正系数分别为 $^{(3)}$

收稿日期: 2002 0F 21; 修订日期: 2002 07 21

- 基金项目: 武汉市晨光计划 (995004098G); 中国博士后基金资助项目
- 作者简介: 黄社华(1964-), 男, 湖北潜江人, 副教授, 博士, 主要从事水力学、多相流体力学教学及科研工作。

第1期

$$\Delta A = 1.05 - \frac{0.066}{A_c^2 + 0.12}, \quad \Delta H = 2.88 + \frac{3.12}{(A_c + 1)^3}, \quad A_c = \frac{(u - u_p)^2}{D + d(u - u_p)/dt}$$

式中 Ks 为 Saffman 升力系数^{$[4]}; <math>v \, v_p$ 分别为与 $u \, u_p$ 方向垂直的流体和颗粒的横向速度分量; ξ 为流体横向速度梯度; 修正系数 Cts 为^[5]</sup></sup>

$$C_{LS} = \begin{cases} (1 - 0.3314a^{0.25}) \exp(-Rep/10) + 0.3314a^{0.25}, & Rep \leq 40\\ 0.0524(a \cdot Rep)^{0.5}, & Rep > 40\\ a = D^{2}\xi/(vRep), & Rep = |u - u_{p}| D/v \end{cases}$$

考虑对粒子运动方程(1)进行无量纲化。取时间、密度和速度为3个无量纲化的基本参数,其中特征时间取 粒子的Stokes 弛豫时间,即

$$T = (\rho_{\rm s} D^2) / 18 \,\mu$$

流场特征速度设为 $U=u_a$,特征密度为流体的密度 Ω 。利用上述特征参数对以下各物理量作无量纲化:

$$t = t^{*} T, \quad u_{p} = u_{p}^{*} u_{a}, \quad u = u^{*} u_{a}, \quad f = f^{*} u_{a}/T$$
$$Q = Q_{s}^{*} Q, \quad D = D^{*} u_{a}T, \quad \mu = \mu^{*} Q u_{a}^{2}T$$

式中 "*"表示无量纲量。将上述关系代入式(1)中,整理成分量形式得

$$\frac{\mathrm{d}u_{p}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}} = \left(1 - \frac{1}{\rho_{s}^{*}}\right) f^{*} + \frac{1}{\rho_{s}^{*}} \frac{Du^{*}}{Dt^{*}} + c_{1}\left(u^{*} - u_{p}^{*}\right) + \Delta_{4} \frac{1}{\rho_{s}^{*}} \frac{\mathrm{d}\left(u^{*} - u_{p}^{*}\right)}{\mathrm{d}t^{*}} + \Delta_{4} \frac{1}{\rho_{s}^{*}} \frac{\mathrm{d}\left(u^{*} - u_{p}^{*}\right)}{\mathrm{d}t^{*}}$$

由前面讨论知,当背景流场已知时,给定颗粒初始速度后可以求得方程(2)的惟一确定解。由方程(2)可见, 无量纲化的粒子运动速度的解应具有如下函数关系(以二维场为例):

$$u_p^* = F_1(\rho_s^*, D^*, u^*, v^*, f^*; u_p^*, x^*, y^*, t^*)$$

在任一速度分量方向上可定义粒子跟随性的函数关系式为

 $W_p^* = u_p^* - u^* = F_2(\rho_s^*, D^*, u^*, v^*, f^*, u_{p0}^*, x^*, y^*, t^*)$ (3) 由此可见,即使是球形刚性粒子,在一般条件下影响其对流体跟随性的因素仍然是相当多的。本文将主要关注 粒子相对速度在典型流场中随粒子物理特性即粒径和密度的变化关系,因为实际中这两个参数最有可能人为加 以控制。

2 典型流场中粒子运动的数值分析

2.1 均匀振荡流场中粒子的跟随性

对于振荡流场中粒子的跟随性问题,可取无量纲速度场为随时间变化的正弦函数,即

$$u^* = \sin(\omega^* t^*)$$

式中 $\omega^* = \omega T = \frac{\omega \Omega D^2}{18 \mu}$ 为无量纲振荡频率。在不计外势力作用时,粒子运动方程可简化为(为书写方便,以下 均略去各参数的无量纲记号"*")

$$\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho_s} \frac{Du}{Dt} + c_1(u - u_p) + \Delta_A \frac{1}{\rho_s} \frac{\mathrm{d}(u - u_p)}{\mathrm{d}t} + \Delta_H \frac{3}{2\rho_s} \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} \int_0^t \frac{\mathrm{d}(u - u_p)/\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t - \tau}} \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

因此粒子相对流体运动速度 W_p 与各参数的函数关系式(3)简化为

$$W_p = F_2(\rho_s, D, \omega, u_{p0}, t)$$

注意到振荡流存在速度振幅这样一个特殊参数,它也是前面进行无量纲化时的特征参数之一。计算表明, 粒子跟随流体的运动基本上亦是一种振荡运动,不过其相位、振幅和频率都将不与流体相同。据此进一步定义 均匀振荡流场中粒子的跟随性为

$$W_{p\max} = \max_{0 \le t \le t} (u - u_p) = F_3(\beta, D, \omega, u_{p0})$$
(5)

式中 tm 为从粒子开始作非恒定运动到粒子作准周期振荡运动时的某一时间段。

选择空气和水作为计算流体,分别改变粒子的密度、粒径和流体的振荡频率这 3 个参数进行振荡流中粒子 速度的数值计算,可以得到式(5)的定量结果。当背景流体为水时,取特征密度 ρ = 999. 87 kg/m³,水的动力粘 性系数为 μ = 1.72×10⁻³ kg/ms(0°C时),水中示踪粒子的无量纲密度范围取为 ρ = 0.001~2.65。在此范围内选 择一些无量纲密度值,根据通常采用的有量纲粒子粒径范围 D= 1 μ m~1 mm内,相应地无量纲粒径范围为 0.01168~30 960,计算结果如图 1、图 2 所示。



图 1 水流中粒子跟随性与无量纲粒径的关系 Fig. 1 Relations of particle relative velocity to dimensionless particle diameter in water



图 2 水流中粒子跟随性与无量纲密度的关系 Fig. 2 Relations of particle relative velocity to dimensionless particle density in water

如果粒子在空气中运动,则特征密度相应取为 ρ = 1.293 kg/m³,空气的动力粘性系数为 μ = 1.709×10⁻⁵ kg/ms。按照空气中示踪粒子的类型,可得其无量纲密度变化为 ρ = 10~2049.5。对应某一密度,类似地确定 无量纲粒径范围为 0.0001593~23.76,计算结果如图 3、图 4 所示。



为研究流体振荡频率变化对有限雷诺数下粒子运动的影响,考虑示踪粒子粒径 D=0.1 mm, 密度 $\Omega=2650$ kg/m³ 或 999.87 kg/m³,分别取空气和水为背景流体,流体振荡频率的变化范围为 $\omega=50 \sim 5\,000$ Hz,计算结果

1.05

1.00

0.95

0.90

0.85

10²

W PRAX

如图5、图6所示。







2.2 自由涡与点源复合流中的粒子运动

设无量纲二维自由涡与点源复合流(以下简称自由涡源)为

$$u = \frac{-\Gamma y + Qx}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{\Gamma x + Qy}{x^2 + y^2}$$

其中 Γ 、*Q* 分别为旋涡和点源的强度。令颗粒初始速度与流体相同,颗粒初始无量纲位置为 $x_0=0$ 1, $y_0=0$, 类似上节地改变颗粒粒径和密度计算强迫涡源中示踪粒子运动,其中计算粒子运动轨迹时用到以下关系:

$$u_p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad v_p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

而粒子相对速度则定义为 $W_p = \sqrt{(u-u_p)^2 + (v-v_p)^2} \sqrt{u^2 + v^2}$,这里考虑了流场中实际上不存在特征 速度的特点。计算得到的自由涡源中粒子运动特性如图 7~ 图 10 所示。



Fig. 6 Relations of particle relative velocity to oscillating
frequency in air flow (
$$D = 0.1$$
 mm)

ω/Hz

图 6 空气中粒子跟随性与振荡频

率的关系(D=0.1mm)

10³

104



图 9 自由涡源中粒子相对运动速度沿 径向的变化(ρ₌ 0.1)

Fig. 9 Variations of particle relative velocity along radial direction in combined flows of free vortex with source ($\rho_s = 0.1$)



- 图 10 自由涡源中粒子相对运动速度 沿径向的变化(D=0.1 mm)
- Fig. 10 Variations of particle relative velocity along radial direction in combined flows of free vortex with source (D = 0.1 mm)

2.3 Stuart 涡中的粒子运动

Stuart 涡流是一种比较特殊的旋涡运动,因其流动外观形态的原因又称为一种"猫眼"状流动(图 11)。我们 认为这种旋涡运动与实际剪切层流动中的某些离散涡系具有一定的相似之处,因而考察其中示踪粒子的运动特 性。无量纲化的 Stuart 涡流场可用下列函数描述:

$$u = \frac{\sin(y)}{\cosh(y) - 0.5\cos(x)}, \qquad v = \frac{0.5\sin(x)}{\cosh(y) - 0.5\cos(x)}$$

设粒子初始速度与流体相同,颗粒初始无量纲位置为 $x_{0}=6.28$, $y_{0}=0.1$,或 $x_{0}=9.42$, $y_{0}=0.1$,改变颗粒径和密度计算 Stuart 涡中示踪粒子运动。关于不同初始位置对 Stuart 涡中粒子运动的影响,考虑示踪粒子粒径 D=0.1 mm,密度 $\rho_{s}=2.650$ kg/m³,取水为背景流体进行计算,结果如图 12~图 16 所示,其中径向指流场中任一点到某一 Stuart 涡中心的位移。



图 11 Stuart 涡流线













Fig. 13 Variations of particle relative velocity along x direction in Stuart vortex($\rho_s = 1.0, x_0 = 9.42, y_0 = 0.1$)



- 图 15 不同初始位置的粒子相对速度沿 x 向 的变化($\rho_s= 2.65$, D= 0.1 mm, $x_0= 9.42$)
- Fig. 15 Variations of particle relative velocity along x direction for various initial positions in vortex $(\rho_{s}=2.65, D=0.1 \text{ mm}, x_{0}=9.42)$



- 图 14 Stuart 涡中粒子相对速度沿径向的 变化(ρ_s= 0.1, x₀= 9.42, y₀= 0.1)
- Fig 14 Variations of particle relative velocity along radial direction in Stuart vortex($P_s = 0.1$, $x_{0} = 9.42$, $y_{0} = 0.1$)



- 图 16 粒子与流体绝对速度的角度差沿径向 的变化(Ps= 2 65, x₀= 6 28, y₀= 0 1)
- Fig 16 Variations of angle difference between particle and *fluid velocity vector along radial* direction $(P_s = 2, 65, x_0 = 6, 28, y_0 = 0, 1)$

3 计算结果分析

由图 1 和图 3 可见, 在粒子无量纲密度一定时, 随粒子无量纲粒径的减少(相应有量纲粒径的增加), 一般情况下粒子相对流体运动速度将增加。对于一定粒径的示踪粒子, 随粒子无量纲密度的增加, 粒子的跟随性存在两种变化趋势: ① 当无量纲密度小于 1.0时, 随着无量纲密度的增大, 粒子的相对速度亦增大, 如图 2 和图4 所示。特别是, 当粒径一定时, 在 大于 1.0时, 随着无量纲密度的增大, 粒子的相对速度亦增大, 如图 2 和图4 所示。特别是, 当粒径一定时, 在 无量纲密度接近于 1.0的附近, 粒子的相对速度衰减很快。当粒子无量纲密度为 1.0时, 即粒子与流体密度相 等时, 在本文讨论的粒径范围内, 粒子最大相对速度几乎等于零, 并且当粒子粒径变化量基本保持不变 (见图 1)。这一性质表明, 与流体密度相等的中性悬浮示踪粒子对流体具有很好的跟随性。对于粒径和密度一 定的粒子, 由上图(图 1 和图 3) 还可见, 其对水流的跟随性要比在空气中强得多, 这是由于粒子与流体的密度 比在两种情况下相差很大的缘故,所以用密度比(即相对密度或无量纲密度)作为考量粒子跟随性的参数之一是 很合理的。因此,在实际中根据被测流体的密度大小尽可能地选择密度与之接近的粒子作为激光测速的示踪粒 子,将可获得较好的测速精度,同时允许选择适当大粒径的粒子以改善取样信号质量。

图 5 和图 6 分别示出了水流和空气中某一粒径和密度的粒子相对速度与流体振荡频率的关系。当无量纲密 度不等于 1.0 时,随振荡频率的增加,水流中示踪粒子的相对速度单调增大。在空气中示踪粒子的相对速度先 是随流体振荡频率的增大而迅速增大,并超过流场特征速度值(无量纲相对速度大于 1.0);在达到某一极大值 后随流体振荡频率的增大而逐渐减小,并趋近于流场特征速度。在上述情况下粒子对两种流体的跟随性都较 差。此外同样特殊的是:如图 5 所示,当无量纲密度为 1.0 时,粒子相对速度趋于零,基本上不随流体振荡而 变化。因此,与流体密度相同或很接近的示踪粒子也可以较好地跟随流体的高频运动。

由图 10和图 12~ 图 14 可见,在各种旋涡流场中,粒子的跟随性与无量纲密度的关系类似于均匀流场中的 情形。在旋涡流场空间任一点上,当 Q < 1.0时,粒子相对速度较大,当 Q > 1.0时,随着粒子无量纲密度的 增加,粒子相对速度增大。当 Q= 1.0时,在本文讨论的粒径范围内,无论粒子大小如何,粒子相对速度以及 绝对速度角度差在旋涡场的任一位置点上都趋于零。这一性质说明,与流体密度相等的中性悬浮粒子对有剪切 结构存在的流场也具有很好的跟随性。由此可以希望,采用与流体密度相等或接近的适当粒径的粒子作为激光 测流的示踪粒子,对复杂流动的测量亦有潜力并能获得较高的精度。

旋涡流场中粒子相对运动速度和粒径的关系与均匀流中的情况正好相反, 随着有量纲粒径的增大, 一般情况下粒子相对速度下降, 即跟随性变好, 如图 7、图 9、图 12 和图 14 所示。此外粒子与流体的绝对速度角度 差与粒径的关系也是如此(图 16)。其中例外之一是, 当密度比 Q= 1.0 时, 粒子对流体有很好的跟随性, 且不随 粒径变化(图 8 和图 13)。另一种例外情况则是, 在 Stuart 涡中, 当 Q= 0.1 时, 粒子相对速度随有量纲粒径的变 化趋势是: 在 *D* < 0.1 mm 时, 随着粒径的增大而增加, 而后在 *D* > 0.1 mm 时, 却随着粒径的增大而减小。旋 涡流中上述粒子跟随性和粒径的关系与一般直观常识很不相同, 这一研究结果值得引起关注。这一发现将意味 着, 对于类似于或具有旋涡运动性质的复杂流动的测量而言, 激光示踪粒子并非越小越好。

在其它条件相同时, 与均匀振荡流中的粒子运动相比, 旋涡流中粒子对流体的跟随性较差。主要表现在粒 子无量纲相对速度在均匀流场中一般不大于 1.0(密度比远远大于 1.0 或远远小于 1.0 时除外), 即不大于振荡 流体特征速度的 100%。而在旋涡流中, 粒子无量纲相对速度是空间位置坐标的函数, 并且与粒子初始位置有 关(图 15)。随着空间位置的不同, 粒子相对运动速度可在较大的范围内变化, 而且其数值经常大于 1.0, 即大 于当地点流体速度的 100%。此外, 在旋涡中即使粒子绝对速度的幅值与流体速度幅值大小相等, 粒子相对速 度也不一定为零。这就是说, 在有结构的流场中粒子运动还存在向量角度的跟随性问题。由图 16 可见, 在 Stuart 涡中速度的角度差达 0.2 rad 以上。

4 结 论

通过计算不同流场中球形刚性粒子的非恒定运动,对复杂流动中激光测速粒子的响应特性进行了数值参数 化研究,分析了粒子的粒径、密度以及初始位置等参数对粒子跟随性的影响。得到的主要研究结果如下:

(1) 定义了一般流场中粒子跟随性的概念,并基于高颗粒雷诺数球形刚性粒子非恒定运动方程给出了粒子 跟随性的数学表述。

(2) 旋涡流中粒子的跟随特性比在均匀非恒定流中差, 流场的非均匀性使得粒子所受作用力的大小随空间 位置变化, 进而使粒子运动轨迹、粒子运动速度与粒径、密度以及初始位置的关系变得更为复杂。

(3) 示踪粒子的粒径和密度对其跟随性有重要影响,其中密度参数的作用尤为明显。特别是,对于与流体 密度相等的中性悬浮粒子,相对速度以及绝对速度角度差在不同流场的任一时间和空间点上都有趋于零的特性,表明中性悬浮粒子对复杂流具有很好的跟随性。 第1期

参考文献:

- Huang Shehua, Li Wei, Cheng Liangjun. On equation of discrete solid particles's motion in arbitrary flow field and its properties [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 2(3):297 310.
- [2] 黄社华. 湍流激光测量中异质粒子的跟随性研究[D]. 北京: 北京大学(博士后出站报告), 1999, 10.
- [3] Odar F. Verification of the proposed equation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid[J]. J Fluid, 1966, 25(3): 591-592.
- [4] Tsuji Y, et al. Experiments on the unsteady drag and wake of a sphere at hight Reynolds number [J]. Int J Multiphase Flow, 1991, 17:343-354.
- [5] Mei R. An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number[J]. Int J Multiphase Flow, 1992, 18 (1):145-148.
- [6] 舒 玮. 湍流中散射粒子的跟随性[A]. 第二届全国流体力学会议论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [7] Mei R. Velocity fidelity of flow tracer particles[J]. Experiments in Fluids, 1996, 22:1-13.
- [8] 黄社华,魏庆鼎.激光测速粒子对复杂流动的响应特性研究一I颗粒非恒定运动数学模型及其数值方法[J].水科学进展, 2003,14(1):20-27.

On velocity response of tracing particles in laser-based velocimetry to complex flows, 2, numerical analysis of sliding velocity of tracing particles in various flows^{*}

HUANG She hua¹, WEI Qing ding²

(1. Hydrodectric Engineering College, Key Laboratory of Water and Sediment Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China;
2. State Key Laboratory for Turbulence Research, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Application of the laser based velocimetry to experimental researches of flows is closely involved in tracking ability of particles whose density or initial velocity is different from that of fluid. Based on the norr dimensional particle transient mortion equation for high particle Reynolds number, a concept of velocity of small particles in response to arbitrary flows are presented and described mathematically. In various typical flows, the particle's transient motions are investigated numerically, and the effects of several parameters, such as particle diameter and density, on particle's velocity in responses to flows are arralyzed quantitatively.

Key words: tracking ability of particles; transient motion; numerical simulation.

^{*} The project is supported by Doctor Foundation of China.