

浅水方程数值计算方法的研究

张修忠¹, 王光谦¹, 金 生²

(1. 清华大学水利水电工程系, 北京 100084; 2. 大连理工大学土木系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 求解以水位为变量的连续方程, 并根据 Navier-Stokes 方程压力修正算法的基本思想, 建立了浅水方程的水位修正算法, 放宽了对离散时间步长的限制。通过对离散方程系数矩阵的重新构造, 建立了高分辨率有限元格式, 该格式既具有较高的离散精度又避免了数值解的伪振荡。对动量方程的阻力项做负坡线性化处理, 提高了露滩计算的稳定性。数值模拟结果与解析解吻合良好, 表明所建立的数值计算方法是正确的和可靠的。

关 键 词: 浅水方程; 数值计算; 水位修正算法; 高分辨率格式; 有限元法

中图分类号: TV 131.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2003)04-417-07

具有自由表面的浅水流动问题广泛的存在于水利、海岸和环境等工程领域, 浅水流动在数学上可以由浅水方程描述, 若给定适当的初边值条件, 则构成独立的定解问题, 可进行数值求解。尽管雷诺平均的 Navier-Stokes (N-S) 方程足以用于计算浅水流动问题, 但由于受计算机条件及数值计算技术的限制, 解决大尺度的实际问题还是颇费时间的。因此, 在过去 20 多年的时间里浅水流动的数值模拟技术得到了长足的发展和广泛的应用^[1~5]。

然而, 由于受表面重力波波速的限制, 浅水方程的离散与求解对时间步长要求非常严格, 从而降低了浅水模型的计算效率, 这也是很多三维浅水模型使用模式分裂技术的一个主要原因^[6]。对于实际的工程问题, 底高程往往变化较大, 较之水深、水位在空间的变化往往要缓慢一些。因此, 本文求解以水位为变量的连续方程, 并参照 N-S 方程压力修正算法的基本思想^[7], 建立了浅水方程的水位修正算法。

对于双曲型问题及对流占优问题, 对流项的 Galerkin 有限元离散虽然具有较高的精度, 但由于未充分考虑到对流的上风影响效应, 导出的离散方程具有某种程度的病态性质, 即系数矩阵的严重非对称性及非对角占优, 因而往往造成震荡的数值解。简单的一阶迎风格式虽然可以有效地消除数值振荡, 但往往引入了过大的人工耗散, 造成离散精度下降及间断抹平现象。20 世纪 80 年代发展起来的高分辨率格式, 如 TVD^[8]、ENO^[9]格式是解决上述问题的有效方法。在高分辨率格式中, 通过引入与解的性质有关的限制因子 Limiter, 使格式既具有较高的离散精度又避免解的高频振荡。本文利用非结构化网格条件下引入的 Limiter 保证格式的高分辨率性质——离散的高精度与解的保单调性。

浅水流动数值计算的另一个主要困难是露滩问题, 关于动边界问题的有效解决方法仍需加强研究。本文在固定网格条件下, 对动量方程中的阻力项作负坡线性化处理, 以期提高模型处理露滩问题的能力。

1 浅水方程

对于平面大范围的自由表面流动, 水深尺度一般远小于平面尺度, 可引入浅水假设来简化基本的守恒方程。浅水方程最基本的假设是沿水深方向的静水压力分布假设, 在此假设前提下可导出三维浅水方程。若进一步引入水深方向的平均化, 即可导出目前广泛应用的平面二维浅水方程。

收稿日期: 2002-06-24; 修订日期: 2003-01-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (59890200); 水利部资助重大项目

作者简介: 张修忠 (1972 -), 男, 山东沂水人, 清华大学博士研究生, 主要从事水流、泥沙数学模型研究。

E-mail: zxz98@mails.tsinghua.edu.cn

连续方程

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

动量方程

$$\frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial (Huu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hvu)}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z}{\partial x} - gu \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} + v \left(\frac{\partial^2 Hu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Hu}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial (Hvu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hvv)}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z}{\partial y} - gv \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} + u \left(\frac{\partial^2 Hv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Hv}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

式中 水位函数 Z 定义为 $Z = Z_b + H$; Z_b 和 H 分别为床面高程和水深; u 、 v 分别为 x 、 y 方向的水深平均的流速; ν 、 C 分别为涡粘性系数和谢才阻力系数。

浅水方程是 N-S 方程的有效简化形式, 通常能够满足工程精度的要求, 且在以下两方面大大简化了一般自由表面流的数学模型。首先, 静水压力假定的引入, 避免了一般不可压缩流压力计算的困难; 其次, 通过定义水位函数, 质量守恒方程转化为水位演进的控制方程, 从而可以方便地确定自由表面的位置。

2 水位修正算法

式(1)~式(3)为浅水流动过程中描述(Z , Hu , Hv)随时间(t)和空间(x , y)的发展变化规律。从时间发展方程的角度来讲, 在经过空间离散后, 式(1)~式(3)分别构成 Z , Hu , Hv 关于时间的常微分方程组, 可以采用多种时间推进法如 Runge-Kutta 法、显式时间差分法等进行求解。受稳定性条件的限制, 显式时间推进法要求采用较小的时间步长。本文采用隐式时间推进法, 为简化隐式迭代求解的复杂性, 采用顺序求解方程式(1)~式(3)的方式计算水位 Z 和 x 、 y 方向上的单宽流量 Hu 、 Hv 。

动量方程的时间离散可写成

$$\frac{(Hu)^{n+1} - (Hu)_0}{\Delta t} + \frac{\partial (Huu)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial (Hvu)^{n+1}}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z'}{\partial x} - \left[gu \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} - v \left(\frac{\partial^2 Hu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Hu}{\partial y^2} \right) \right]^{n+1} \quad (4)$$

$$\frac{(Hv)^{n+1} - (Hv)_0}{\Delta t} + \frac{\partial (Hvu)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial (Hvv)^{n+1}}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z'}{\partial y} - \left[gv \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} - u \left(\frac{\partial^2 Hv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Hv}{\partial y^2} \right) \right]^{n+1} \quad (5)$$

式中 下标 0 代表上一时间步的变量。若给定水位的迭代值 Z' , 则可以由动量方程式(4)、式(5)求得单宽流量 Hu 、 Hv 的迭代值 $(Hu)_i'$ 。

对连续性方程(1)作隐格式离散可得

$$\frac{Z^{n+1} - Z_0}{\Delta t} + \frac{\partial (Hu)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial (Hv)^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

设上一顺序求解迭代步的水位为 Z' , 一次顺序求解迭代步的水位修正量为 δZ , 即

$$Z^{n+1} = Z' + \delta Z \quad (7)$$

为加快隐式顺序求解的收敛速度, 在求解连续方程式(6)时, 适当考虑水位修正 δZ 与单宽流量 $(Hu)_i$ 的迭代修正耦合。分析动量方程, 可以建立如下形式的迭代关系式以加快迭代收敛:

$$(Hu)_i^{n+1} = (Hu)_i' - \alpha \left[gH \frac{\partial \delta Z}{\partial x_i} \Delta t \right] \quad (8)$$

式中 $i = 1, 2$; $(Hu)_i^{n+1}$ 为第 $n+1$ 时间步的单宽流量; Δt 为时间步长; $(Hu)_i'$ 为上一顺序求解迭代步的单宽流量; α 为水位修正与单宽流量修正的迭代耦合参数, 当 $\alpha = 0$ 时, 意味在应用式(6)求解 Z^{n+1} 时, 采用的是上一顺序求解迭代步的 $(Hu)_i'$, 即简单的顺序求解(类似于代数方程的 Jacobi 迭代求解方法), 一般可取 $\alpha = 1$ 。

式(8)表示单宽流量的修正只是由水位修正所引起, 因此该表达式是近似的, 但由于这是迭代计算过程的

简化处理, 因此是容许的^[10]。事实上, N-S 方程的 SIMPLE 类算法也是这样处理的^[11]。

利用式(7)和式(8), 式(6)经合并整理后可得

$$\frac{\delta Z}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \Delta t \frac{\partial \delta Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c^2 \Delta t \frac{\partial \delta Z}{\partial y} \right) + f' \quad (9)$$

$$f' = - \frac{(Z' - Z_0)}{\Delta t} - \left[\frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} \right] \quad (10)$$

式中 $c = \sqrt{gH}$, 为浅水重力波波速; f 是水位修正量方程(9)的源项。当迭代趋于收敛时, 式(10)即为水流连续性方程, 因此源项 f 趋于零。即 $f' \rightarrow 0$, $\delta Z \rightarrow 0$, $Z' \rightarrow Z^{n+1}$, $(Hu)_i' \rightarrow (Hu_i)^{n+1}$ 。分析方程(9)不难发现, 该方程具有形式上的抛物型性质, 反映了水位扰动是以浅水重力波波速传播的物理本质。

方程(9)的有限元离散可表示为

$$\int_{\Omega} \frac{\delta Z}{\Delta t} N_i d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \Delta t \frac{\partial \delta Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c^2 \Delta t \frac{\partial \delta Z}{\partial y} \right) \right] N_i d\Omega + \int_{\Omega} f N_i d\Omega \quad (11)$$

式中 $\delta Z = N_j \delta Z_j$; N_j 为有限元插值函数。

对方程(11)作分部积分后得:

$$M_{ij} \delta Z_j = D_{ij} \delta Z_j + f_i \quad (12)$$

其中 M_{ij} 为质量矩阵; D_{ij} 为扩散矩阵; f_i 为源项; 分别表示为

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega / \Delta t \\ D_{ij} &= \int_{\Omega} c^2 \Delta t \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\ f_i &= \int_{\Omega} f N_i d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

由式(12)可求解水位修正量 δZ_j 。

水位修正算法可归纳为以下的求解过程:

- (1) 给定物理量 Z 、 Hu 、 Hv 的初值;
- (2) 由动量方程(5)、方程(6)计算 Hu 、 Hv ;
- (3) 由水位修正方程(10)计算水位修正量;
- (4) 采用式(8)计算 Z^{n+1} ;
- (5) 判断 $|\delta Z| \leq \varepsilon$ 是否满足, ε 为收敛精度参数;
- (6) 如果未满足收敛条件, 令 $Z' = Z^{n+1}$, 重复 (2) ~ (5) 迭代计算;
- (7) 如果满足收敛条件, 推进一个时间步, 开始下一时间步计算。

3 高分辨率有限元格式

描述流动的基本守恒方程可统一写成对流扩散形式, 其弱解形式经有限元空间半离散后可写成常微分方程组形式

$$M \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j \neq i} c_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + b_i \quad (14)$$

式中 M 为集中质量矩阵; c_{ij} 为影响系数; b_i 为源项; j 为围绕节点 i 的邻近节点。

若系数 $c_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, 则离散格式(14)是稳定的。因为, 若 φ_i 是局部最大值, 即 $(\varphi_j - \varphi_i) \leq 0$, 则 $d\varphi_i/dt \leq 0$, 因此局部最大值不增; 同样, 若 φ_i 是局部最小值, 即 $(\varphi_j - \varphi_i) \geq 0$, 则 $d\varphi_i/dt \geq 0$, 因此局部最小值不减。这种最大值不增、最小值不减的 TVD 性质^[8]或保单调性质, 可以避免解的数值振荡。

对于对流占优问题, 中心差分离散或 Galerkin 有限元离散通常不具有正影响系数的性质, 可以在式(14)中加入 Laplace 形式的人工耗散

$$D = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (\varphi_j - \varphi_i), \quad \alpha_{ij} = \max(c_{ij}, c_{ji}) \quad (15)$$

系数 α_{ij} 的选取形式是为了满足正定性 $\alpha_{ij} \geq |c_{ij}|$ 与整体守恒性 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ 的要求。可以证明, 当采用中心差分离散对流问题得到式(14)后, 结合式(15)的人工耗散等价于一阶精度的迎风格式。由于一阶精度的人工耗散会造成数值解的抹平现象, 可以引入适当的反耗散以提高离散精度。为此, 对于非结构化网格系统, 定义如下形式的高阶耗散

$$D = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [(\varphi_j - \varphi_i) - C(\varphi_j - \varphi_i)], \quad \overline{(\varphi_j - \varphi_i)} = \frac{1}{2} (\Delta^+ \varphi_{ij} + \Delta^- \varphi_{ij}) \quad (16)$$

式中 Δ^+ 与 Δ^- 代表节点 i 和 j 的上游与下游差分, 可通过节点插值计算。因此, 式(16)可改写为

$$D = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [(\varphi_j - \varphi_i) - \Phi(r_{ij}^+) (\Delta^- \varphi_{ij})] \quad (17)$$

式中 $\Phi(r)$ 为限制因子 limiter; r 为梯度比。

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} C\{r + 1\}, \quad r_{ij}^+ = (\Delta^+ \varphi_{ij}) / (\Delta^- \varphi_{ij}) \quad (18)$$

将高阶耗散式(17)加入式(14)可导出

$$M \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j \neq i} (c_{ij} + \alpha_{ij}) \varphi_j + \left[c_{ii} - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \right] \varphi_i - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \Phi(r_{ij}^+) (\Delta^- \varphi_{ij}) + b_i \quad (19)$$

式(19)可改写成下列紧致形式

$$M \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_i \bar{c}_{ij} \varphi_j + b_i \quad (20)$$

可以证明, 当限制因子 $\Phi(r) \geq 0$ 时, 等效的影响系数 $\bar{c}_{ij} \geq 0$, 从而保证格式(20)的高离散精度与解的不振荡性质。

4 露滩问题的处理方法

定义动量方程的摩阻项的系数为 $\alpha = g \sqrt{u^2 + v^2} / (C^2 H)$, 若采用曼宁公式计算谢才阻力系数 C , 则

$$\alpha = g n^2 \sqrt{u^2 + v^2} / H^{4/3} \quad (21)$$

式中 n 为曼宁糙率系数。

动量方程(2)的有限元离散形式可写为

$$M \frac{\partial(Hu)}{\partial t} = C_{ij}(Hu)_j + D_{ij}(Hu)_j + Fx - \alpha M(Hu) \quad (22)$$

式中 C_{ij} 、 D_{ij} 分别为对流矩阵和扩散矩阵; 源项 $Fx = - \int \left(g H \frac{\partial Z}{\partial x} \right) w_i d\Omega$; w 为权函数。

若对方程(22)右端项的最后一项做负坡线性化处理, 则形成的矩阵方程的系数矩阵的对角线元素将增大, 这样无疑会增加计算的稳定性或加快计算的收敛。

对于露滩点, 计算中常将其水深设为一小量, 譬如令 $H = 0.001$ m, 若再适当加大系数 α 的分子, 则 α 将是一个大数。当 α 足够大时, 动量方程可近似简化为

$$\alpha(Hu_i) = -g H \frac{\partial Z}{\partial x_i} \quad (23)$$

进而得到

$$(Hu_i) \rightarrow O(1/\alpha) \quad (24)$$

上述处理方法不但能够使计算收敛或加快收敛, 而且有利于露滩计算的稳定。

5 数值计算方法的检验

5.1 露滩算例

忽略阻力和柯氏力, 一维浅水方程的无量纲化形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial(uHu)}{\partial x} &= -H \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

在下列初值条件下

$$H(x, t=0) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (26)$$

$$u(x, t=0) = 0$$

其解析解参见文献[12]。

图1给出了数值计算结果与解析解的对比关系, 不难发现, 二者吻合良好。表明: 本文的离散格式具有较高的精度, 对露滩问题的处理方法也是有效的。

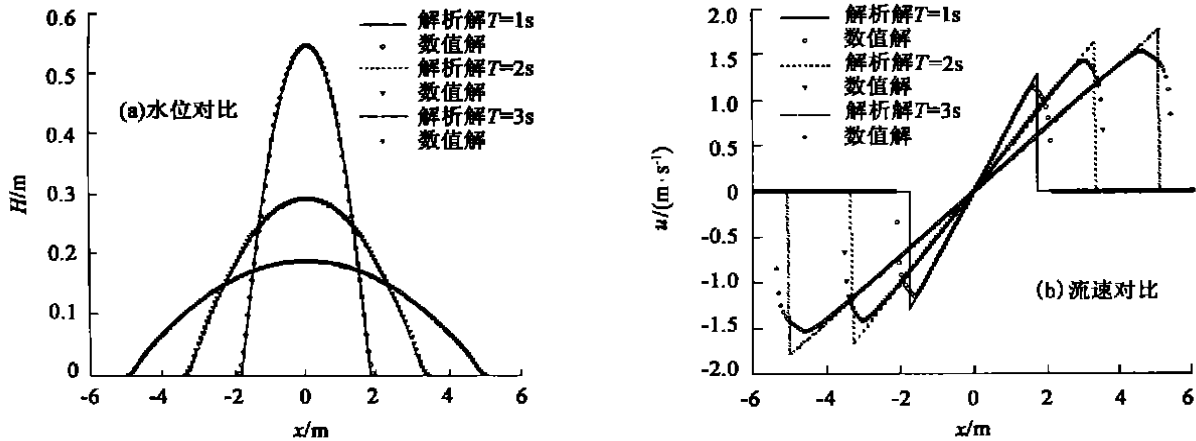


图1 水滴漫滩扩散问题的水位、流速验证

Fig. 1 Spreading drop test

5.2 旋转流场中圆柱型分布的对流输运

二维对流输运方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

式中 速度矢量: $u = -\Omega (y - y_0)$, $v = \Omega (x - x_0)$, Ω 为圆柱运动的角速度, rad/s ; (x_0, y_0) 为旋转流场的中心; φ 为对流输运量。

图2(a)为一对流输运量的初始分布, 柱高为1.0, 半径为0.4, 圆心坐标为(0.2, 0.2), 圆柱以外区域的对流输运量为零, 可参见文献[13, 14]。图2(d)为另一对流输运量的初始分布, 圆柱高为1.0, 半径为0.3, 圆心坐标为(0.0, 0.5), 将圆柱体抠去长0.5、宽0.1的棱柱体, 可参见文献[15]。两种情况下的计算网格均为: 100×100 , $\Delta x = \Delta y$ 。

图 2(b)、2(c)和图 2(e)、2(f)分别给出了流场旋转 2π 、 $\pi/2$ rad 后的计算值与理论值的对比关系。可以看出,一阶格式的耗散性较大,本文格式具有较高的精度和稳定性,与理论值吻合良好。

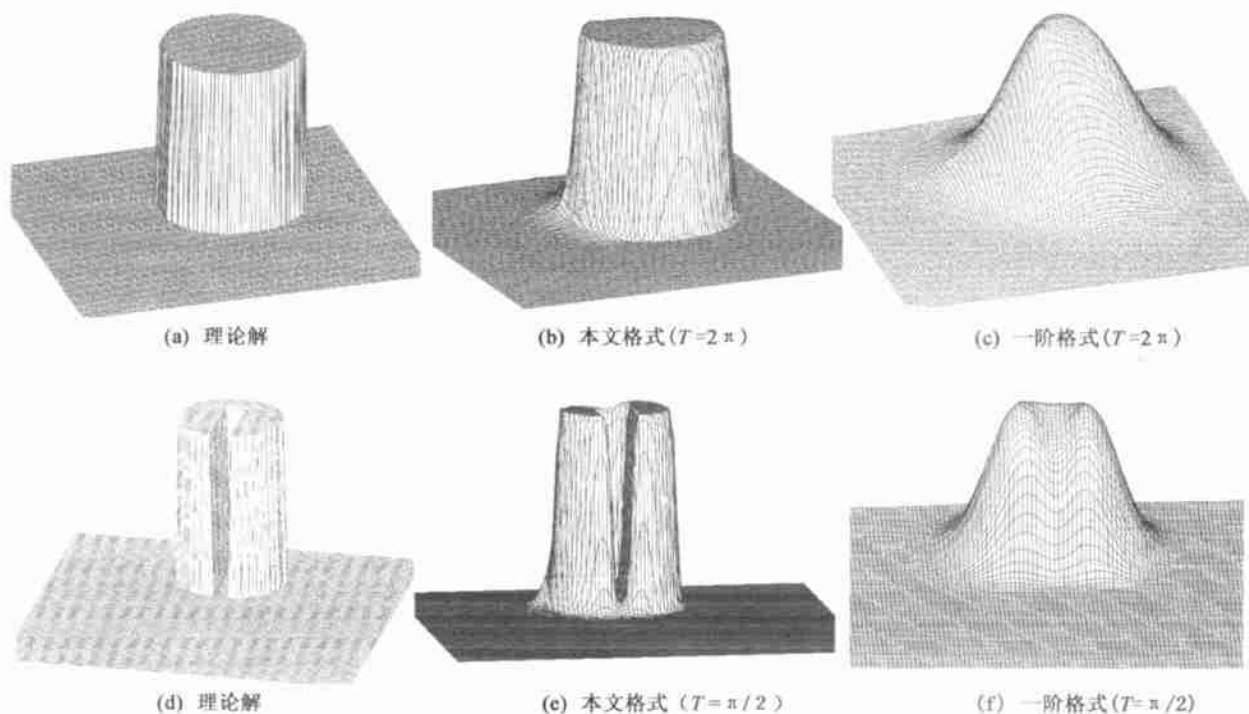


图 2 旋转流场中圆柱型分布的对流输运

Fig. 2 Rigid rotation of a current-carrying cylinder

6 结 论

本文参考不可压缩流 N-S 方程压力修正算法的基本思想,建立了浅水方程的水位修正算法。该算法放宽了对离散时间步长的限制,允许使用较大的时间步长,从而提高了浅水模型的计算效率。对动量方程的阻力项作负坡线性化处理,不但有利于使计算收敛或加快收敛,而且提高了露滩计算的稳定性。所建立的高分辨率有限元格式具有耗散小、精度高且不产生数值振荡的优点;而且基于非结构化网格的有限元法,便于处理复杂几何边界问题,具有离散和求解通用性强等优点。因此,基于本文方法建立的浅水流动数学模型将具有很强的实用性。数值计算结果与理论解吻合较好,表明本文的方法和思想是正确的和可靠的。

参考文献:

- [1] Mcguirk J J, Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharge into open-channel flow[J]. J Fluid Mech, 1978, 86: 761 - 781.
- [2] Fennema R J, Chaudhry M H. Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows[J]. J hydr Res, 1989, 27(3): 321 - 332.
- [3] Molls T, Molls F. Space-time conservation method applied to Saint Venant equations[J]. J Hydr Engrg, ASCE, 1998, 124(5): 501 - 508.
- [4] Mingham C G, Causon D M. High-resolution finite-volume method for shallow water flows[J]. J Hydr Engrg, ASCE, 1998, 124(6): 605 - 614.
- [5] Hon Y C, Cheung K F, Mao X Z, et al. Multiquadric solution for shallow water equations[J]. J Hydr Engrg, ASCE, 1999, 125(5): 524 - 533.

- [6] Mellor G L. Users guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model[R]. Princeton University, Princeton, NJ 08544 - 0710, 1998.
- [7] Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1972, 15: 1787 - 1806.
- [8] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 1983, 49: 357 - 393.
- [9] Harten A, Engquist B, Osher S, *et al.* Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III[J]. J Comput Phys, 1987, 71: 231 - 303.
- [10] 章本照, 沈新荣. 粘性不可压流动压力修正的有限元计算[J]. 空气动力学报, 1997, 15(3): 337 - 343.
- [11] 金忠青. N-S方程的数值解和紊流模型[M]. 南京: 河海大学出版社, 1989. 189 - 206.
- [12] Schar C, Smolarkiewicz P K. A synchronous and iterative flux-correction formalism for coupled transport equations[J]. J Comput Phys, 1996, 128: 101 - 120.
- [13] Devore C R. Flux-corrected transport techniques for multidimensional compressible magnetohydrodynamics[J]. J Comput Phys, 1991, 92: 142 - 160.
- [14] Toth G, Odstrcil D. Comparison of flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems[J]. J Comput Phys, 1996, 128: 82 - 100.
- [15] Zalesak S T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids[J]. J Comput Phys, 1979, 31: 335 - 362.

Study on the numerical solution methods for shallow water equations^{*}

ZHANG Xiu-zhong¹, WANG Guang-qian¹, JIN sheng²

(1. Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract : According to the basic idea of pressure correction algorithm for the Navier-Stokes equations, the water level correction algorithm for the shallow water equations is proposed in the paper, which can greatly reduce restrictions on time step. By reconstructing the coefficient matrix of the original algebraic system, a high-resolution finite element scheme based on unstructured grids is established, so that both the requirement of high-order of accuracy and non-oscillatory condition are satisfied. For the sake of convergence or fast convergence, the friction terms of the momentum equations are transposed and linearized. Comparisons with analytical solutions are made and good agreements are obtained.

Key words : shallow water equations; numerical calculation; water level correction algorithm; high-resolution scheme; finite element method

* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 59890200).