# 多孔介质渗透率的分形描述

刘晓丽、梁 冰、薛 强

(辽宁工程技术大学力学与工程科学系, 辽宁 阜新 123000)

摘要:针对土壤、岩石等多孔介质结构的复杂性,从其结构形成的物理机制和达西定律出发,利用分形几何理论, 将土壤等作为在统计意义上具有分形特征的多孔介质来研究其水力参数与结构之间的关系,建立了饱和多孔介质 渗透率与其分维数之间的定量化的函数式。试验应用扫描电镜法研究了多孔介质断面微结构并算出分维数。试验 结果表明:利用该模型预测的多孔介质渗透率与实测值基本吻合,能够比较精确地预测多孔介质水力参数。

关 键 词:分形;多孔介质;分维数;渗透率;扫描电镜法 中图分类号:P6411 2 文献标识码:A 文章编号:100126791(2003)0&769205

多孔介质水力参数的选取和确定是多孔介质中溶质运移和污染物迁移预测的基础。在现有的研究中,一般 通过试验测定水力参数,然而试验测定具有周期长、成本高和数据离散等缺点<sup>[1]</sup>,同时,实验室环境的影响 以及试验多孔介质周围环境(包括应力场、尺度效应等)的改变也会使测量数据有很大误差。所以,/参数给不 准0 一直是多孔介质溶质运移理论与数值模拟的/瓶颈0 问题,已经成为影响预测准确程度的最主要因素。

自然界中许多多孔介质(如土体、岩石等)经过漫长的时间,在气候、生物活动和地形运动等自然因子的综合 作用下形成其微观和宏观特性,因而孔隙结构具有粗糙曲折、剧烈多变的特点,给定量研究多孔介质水力参数带 来了很大困难。针对这种复杂性,近10多年来,国际上许多专家<sup>[2~6]</sup>从多孔介质结构形成的物理机制出发,利 用法国数学家曼德尔博尔特<sup>[7]</sup>创立的分形几何理论,来研究多孔介质水力参数与其结构之间的关系,如Katz和 Thompson<sup>[2]</sup>利用扫描电镜对砂岩进行测试,证明了多孔介质的微观孔隙结构具有分形特征,并测定了其分维数; Tyler 和 Wheatcraft<sup>[3]</sup>将毛管孔隙通道模型运用于 Van Genuchten 经验模型中,得出水分特征曲线的分形模型; Rieu 和 Sposito<sup>[4]</sup>以 Sierpinski毯为概念模型提出了孔隙分布的理论模型; Perfect 等<sup>[5]</sup>又对 Tyler 和 Wheatcraft 及 Rieu 和 Sposito 所建立的模型进行了改进,得出了多孔介质含水率与孔隙压力的关系式; Shepard<sup>[6]</sup>利用 Koch 曲线模拟土 壤孔隙,得出了一个呈幂律关系的水力传导系数公式。尽管以上这些研究,为多孔介质溶质运移理论提供了一种 全新的研究思路和方法,使定量描述多孔介质结构的微观、宏观复杂性成为可能,但是很多模型具有局限性,如 文献[6]中所建模型,在低含水率时,比较准确,随着含水率增大,误差越来越大。

本文基于分形几何理论,研究了多孔介质渗透率与其结构之间的关系,并给出了多孔介质渗透率与多孔介 质分形维数之间定量化的函数式。经实验验证,本文模型能够刻画多孔介质水力特性,揭示和模拟多孔介质水 流与溶质运移转化规律,并为其提供可靠的参数和理论支持。

## 1 多孔介质孔隙的分形特征

分形理论的基本观点是维数的变化是连续的,即维数可以是整数,也可以是分数,还可以是无理数,定量 描述自相似性的参数为分维数 D。所谓分形是指物体的数目与其线性尺度之间存在着幂指数关系,即分形是

收稿日期: 2002210210; 修订日期: 2002212210

基金项目: 国家教育部资助项目 (2000172); 辽宁省自然科学基金资助项目 (2001101063)

作者简介:刘晓丽(1978-),男,山东泰安人,硕士研究生,主要从事环境流体力学数值模拟及环境岩土工程方面的研究。 Email: liux178@sinal.com

指物体的形状<sup>[8,9]</sup>、与其大小无关、而分维是分形关系中的幂指数值。

很多研究表明<sup>[1~6]</sup>:土壤、岩体等多孔介质(以下以土壤为例)的孔隙结构是多层次统计自相似的混沌体。 具有分形特征。因此,对于多孔介质孔隙,设 r 为孔隙的等效半径,N ( r) 为半径大于 r 的孔隙数目,则

$$N(r) = \mathbf{Q}^{\max}(x)dx = cr^{-D} \qquad \frac{dN(r)}{dr} = -cDr^{-(1+D)}$$

式中 D 为多孔介质孔隙分形维数; P(x)为半径为 x 的孔隙分布密度函数; c 为与空间尺度有关的常数, 当取 为单元体时、c= co、此时、多孔介质的孔隙度为

$$U = \left| \bigcap_{r_{\min}}^{max} \left| \frac{dN(r)}{dr} \right| r^2 dr = \frac{cD}{D-2} r^{2-D} \left[ 1 - \left( \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2-D} \right]$$
(1)

此时的平均半径为

$$\overline{\mathbf{r}}_{av\sigma} = \frac{\sum_{min}^{max} \left| \frac{dN(r)}{dr} \right| r dr}{N(r)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} r_{max}^{1-D} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{1-D} \right]}{cr_{min}^{-D}}$$
(2)

以上推导过程中、笔者假定孔隙半径是连续分布的。

渗流力学基本理论 2

Darcy 定律数学表达式为

$$V = - \frac{K}{L} \left( \frac{5p}{5Z} + Q \right)$$
(3)

V 为流体速度; L 为流体粘度;  $\frac{5p}{57}$ 为流体压力梯度; Q 为流体重率; K 为渗透率。用不同的牛顿单相 式中 流体通过同一多孔介质时, Darcy 定律中 K 值保持不变, 表明渗透率 K 只与多孔介质本身的结构特性有关, 而与单相牛顿流体的特性无关。

 $V = -\frac{K}{L} Q + \frac{5p}{5Z}$ 

Darcy 定律是通过实验总结出的,因此它有一定的适用范围。 曾有实验研究给出 Fanning 摩擦系数 f 对雷诺数 Re 的关系曲线, 如 图1所示<sup>[10]</sup>。

f 和Re分别为

$$f = -\frac{U^2 d}{2 OV^2} \left[ Qg + \frac{5p}{5Z} \right]$$
  $Re = \frac{Qd V}{UL}$ 

式中 d 为特征尺度、对非固结材料是颗粒直径、对固结材料是毛 细管直径、均指平均值。由图1可见、整个曲线可以大致分成3段: 第1段为 Re< 5(不同的多孔介质此值略有不同)、是斜率为-1的 直线段; 第2段为5< Re< 100, 有一个二次曲线的过渡段; 第3 段为 Re> 100、是一个水平直线段。

对于第1段斜率为-1的直线 lnf = lnc - lnRe常数 c 是直线在纵坐标上的截距、由上式显然有 c= f # Re、即 f = c/Re $V = - \frac{Ud^2}{2cL} \left( Q + \frac{5p}{5Z} \right)$ 

将式(4)代入式(5)并整理得

令 K =  $Ud^2/2c$ , 则式(6) 变为

这就是Darcy 定律的表达式(3)、由此得出结论: 在 Re< 5 的范围内、Darcy 定律是适用的、满足此条件的流体



图 1 Fanning 摩擦系数与雷诺数关系曲线 Figl 1 Relationship between Fanning frictional coefficient and Reynolds number

即为 Darcy 流体。

# 3 基于分形理论的多孔介质渗透率表达式

由以上分析可知,对于 Darcy 流体:

K = Ud<sup>2</sup>/2c 或 K = Ur<sup>2</sup><sub>ava</sub>/C<sub>0</sub>(其中 C<sub>0</sub>为一常数) (8)

将式(1)和式(2)代入式(8)得

$$K = Ur_{ave}^{2}/C_{0} = \frac{\frac{cD}{D-2}r_{max}^{2}\left[1-\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{2} D\right]\left\{\frac{\frac{cD}{D-1}r_{max}^{1-D}\left[1-\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{1-D}\right]\right\}^{2}}{cr_{min}^{-D}} = \frac{cD}{C_{0}}$$

$$\frac{cD}{C_{0}(D-2)}\left(\frac{D}{D-1}\right)^{2}r_{max}^{4-D}\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{2D}\left[1-2\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{1-D}+\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{2-2D}+2\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{3-2D}-\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{4-3D}\right]$$

$$\frac{d}{d}\lambda\delta\delta\delta K = r_{min}/r_{max}, \ \delta\pi s \tilde{s} \tilde{l}\Lambda\delta\delta\delta L^{3}$$

$$K = C \frac{D}{(D-2)} \left( \frac{D}{D-1} \right)^2 r_{max}^{4-D} K^{2D} [1 - 2K^{4-D} + K^{2-2D} - K^{2-D} + 2K^{3-2D} - K^{4-3D}]$$
(9)



图 2 多孔介质渗透率与孔隙分维数关系曲线 Figl 2 Relational curve between porous media per meability and fractal dimension

式(9)即为饱和土壤渗透率表达式,其中 C 为常数,可由实验通过曲线拟合确定。

图 2 揭示了由式(9)确定的多孔介质渗透率与孔隙分形 维数之间的关系。由曲线可以看出:在 D I [2, 3]范围内,渗 透率 K 随孔隙分维数D 的增大而增大;当 D [21695(可由上 图直接看出,或用 <u>5K</u> = 0 解得)时,多孔介质渗透率趋近于 **3.0** 0,这对于定性理解多孔介质孔隙分维数具有重要意义。分维 数 D 相同时,K越大,渗透率越小;反之,K越小,渗透率越 大。这揭示了多孔介质孔径空间变异性很大时,有利于溶质 ility 渗透(图(2)中 K扩大 10<sup>5</sup> 倍)。

# 4 多孔介质渗透率预测

测定多孔介质表面分形维数的方法很多,有吸附法、压汞法 及扫描电镜法等。目前最常用的计算孔隙结构分形维数的方法 是扫描电镜法(SEM),SEM具有分辨率高、放大倍数大及立体感 强等特点,SEM扫描图像见图 3。该方法的基本原理是对孔隙界 面上的结构特征体的尺寸分布进行统计,由于单位长度的特征 体数目 N(r)与特征体尺寸 r 之间存在关系 N(r)= cr<sup>-D</sup>,故 h[N(r)]= hc- Dhr,通过特征数目 N(r)与特征体尺寸 r 的 双对数图成线性关系的拟合、可以确定分形维数<sup>[6]</sup>。

试验方法: 冷冻刀切干燥的方法是冻切和冻干 2 种方法的 组合<sup>[11]</sup>。首先把土样切成一个宽约 10 mm, 长约 20 mm 的土 条, 为了保证土样的均匀速冻, 把土样浸入用液氮冷却至 - 193 e 的异戊烷中 3 min, 使土中的孔隙水快速冻结, 形成无



体积膨胀的非结晶质的冰。然后用冷却过的锋利的小刀把土样切割成两部分(厚度为4 mm),这样就得到了土样

的一个平整光滑的断面, 它穿越了土样所有的微观结构单元。把 土样迅速移入已被干冰冷冻至- 50 e 的试样瓶中(图 4), 使土中 非结晶质的冰在真空和低温状态下升华干燥, 干燥后的土样非常 \_ 疏松, 用吸球轻轻将浮土吹走。因为扫描电镜是以电子束作为激 -发源的, 为了防止土样荷电, 必须对土样表面进行抗静电处理。 干燥后的土样再移到 SEM 实验室观察土样表面的结构形态。

本文首先用扫描电镜法对一块 20 mm @10 mm @4 mm 的黄 土样品进行测定。测得 10 种尺寸的孔隙半径及孔隙数目(可直接 由与 SEM 相连的计算机读出) 见表 1, 试验设备见图 4。

在双对数坐标中,标出各数据组所表示的点,并用最小二乘法 拟合,拟合直线见图 5,该直线斜率为-2185,于是土壤样品孔隙分

维数 D= 2185。由式(9) 预测的渗透率值 K= 012831 Lm<sup>2</sup>, 与实测值 K= 012693 Lm<sup>2</sup> 比较, 相差 5112%。其中 r<sub>min</sub> = 1 Lm, r<sub>max</sub>= 1000 Lm, K= r<sub>min</sub>/r<sub>max</sub>= 01001, C= - 10015。土的实际渗透率可由相应土柱渗透实验得出。



1 试样室 2 干冰 3 冰阱 4 液氣 5 扩散泵 6 加热器 7 真空泵 8 真空计 图 4 冷冻干燥仪原理简图

Figl 4 Schematic diagram of freezed drying apparatus

Table 1 Pore quantity and corresponding					
por e r adius					
孔隙半径/Lm	孔隙数目/个				
1	51 7 @10 <sup>9</sup>				
5	11 6 @10 <sup>8</sup>				
30	214@106				
75	11 5 @10 <sup>5</sup>				
150	$118@10^4$				
250	$516@10^{3}$				
400	$11.7 @ 10^3$				
600	120				
800	78				
1 000	45				

表1 对应孔隙半径与孔隙数目



图 5 多孔介质孔隙分维数测量结果拟合曲线

Figl 5 Simulation curve of porous media fractal dimen2 sion

用同样的方法对 7 种不同土质的土体(20 mm @10 mm @4 mm)进行测试,其基本数据见表 2。 表 2 不同质地土壤实验数据

				-			
土质类别	r <sub>max</sub> /Lm	r <sub>min</sub> /Lm	D(据电镜)	K(实测)/Lm <sup>2</sup>	K(预测)/Lm <sup>2</sup>	误差/%	
面砂土	800	1	21 73	011404	01 143 9	21 49	
砂壤土	850	2	21 76	01380 1	01 399 9	51 2 1	
壤 土	880	2	21 74	01376 0	01 362 7	31 54	
粉粘土	820	1	21 8 1	01238 0	01 225 2	51 38	
壤粘土	920	2	21 84	01583 0	01 595 5	21 1 4	
粘土	900	1	21 86	01296 0	01 299 6	11 22	

#### Table 2 Measured and predicted permeability of different soils

## 5 结论与讨论

(1)本文在多孔介质孔隙结构分形描述的基础上,给出了饱和多孔介质渗透率与分形维数之间的函数关系式。通过确定多孔介质孔隙结构的分形维数及其最小最大孔隙半径比,可以利用本文模型预测相应的水力特性参数值。文中模型和方法可以应用于土壤、岩石及煤体等孔隙结构。

(2) 由多孔介质渗透率与孔隙分形维数之间的关系曲线(图 2), 可以揭示多孔介质孔隙分维数的物理意

义: 多孔介质孔隙分维数在一定程度上描述了多孔介质孔隙的连通情况。D=21695 是临界连通分维数值, 实际应用中可以认为 D\21695时, 孔隙才是连通的, 对于低、中辐射核废料填埋处理选址等也具有重要意义。

(3)利用分形几何理论研究多孔介质结构,为多孔介质中水分运移理论提供了一种比较好的研究思路和方法,使定量描述多孔介质结构的微观、宏观复杂性成为可能,为精确刻画多孔介质水力特性,揭示和模拟多孔介质中水流与溶质运移转化规律提供了可靠的参数和理论支持。

(4) 由于多孔介质结构十分复杂,利用分形几何理论研究多孔介质结构尚处于初始阶段<sup>[12,13]</sup>,因此对多 孔介质结构分维数物理意义的认识上还有许多模糊的地方。文中推导出的饱和多孔介质渗透率如何拓展到非饱 和多孔介质带,怎样设计实验来验证,这是本文存在的局限性。

#### 参考文献:

- [1] 刘建国, 聂永丰1 非饱和土壤水力参数预测的分形模型[J]1 水科学进展, 2001, 12(1): 99-105.
- [2] Thompson A H, Katz A J, Krohn C E1 The microgeometry and transport properties of sandstones[J]1Advances in Physics, 1987, 36 (5):625-6941
- [3] Tyler S W, Wheatcraft S WI Fractal process in soil water retention[J]1 Water Resour Res, 1990, 26:1047-10541
- [4] Rieu M, Sposito Gl Fractal Fragmentation: soil porosity and soil water properties Il Theory[J]1 Soil Sci Sco Am J, 1991, 55: 1231
   1238.
- [5] Perfect E, Mclaughlin N B, Kay B D, et al1An improved fractal equation for the soil water retention curve[J]1 Water Resour Res, 1996, 32(2):281-2881
- [6] Shepard S JI Using a fractal model to compute the hydraulic conductivity function [J]1 Soil Sci Sco Am J, 1993, 57:300-306.
- [7] Mandelbrot B Bl Fractal Geometry of Nature[M] 1 San Francisco: Freeman, 19821
- [8] 张国祺, 李后强1 分形理论对世界认识的意义[J]1 大自然探索, 1994, 13(1):11-16.
- [9] 法尔科内 K JI 分形几@ 数学基础与应 用[ M]1 曾文曲,刘世耀,戴连贵,等译 I 沈阳:东北工学院出版社,1991.
- [10] 孔祥言1 高等渗流力学[M]1 合肥:中国科学技术大学出版社, 1999.
- [11] 施 斌, 姜洪涛1粘性土的微观结构分析技术研究[J]1 岩石力学与工程学报, 2001(6):864-870.
- [12] 谢和平, 薛秀谦1 分形应用中的数学基础与方法[M]1 北京: 科学出版社, 19981
- [13] 何 琰, 吴念胜1确定孔隙结构分形维数的新方法[J]1石油实验地质, 1999(4): 372-375.

### Fractal description of porous media permeability<sup>x</sup>

#### LIU Xiao2li, LIANG Bing, XUE Qiang

(Mechanics and Engineering Department, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: The fractal geometry theories were adopted to study the relations between porous media permeability and its microstructure from the physical mechanism of its microstructure formation and Darcy. s law1Furthermore the function between saturate porous media permeability and the fractal dimension was established with the viewpoint that soil(or rock) is fractal in a statistic sensel The morphological details was studied and the fractal dimensions was gained by the scanning electron microscope, which verified the function1Compared the permeability values predicted by the model with the measured values, a good agreement was obtained1The results demonstrate that the model is precise in predicting the porous media hydraulic parameters1

Key words: fractal; porous media; fractal dimension; permeability; scanning electron microscope

X The project is supported by the Ministry of Education (Nol 2000172)1