第 15 卷 第 1 期
2004 年 1 月

水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE

Vol. 15 ,No. 1
Jan. , 2004

二阶双系数动态亚格子应力模型

唐学林, 钱忠东, 吴玉林

(清华大学热能工程系, 北京 100084)

摘要: 基于亥姆霍兹速度分解定理和 Smagorinsky 模型, 提出二阶双系数动态亚格子尺度应力模型, 即亚格子尺度应力是可解的应变率张量和旋转率张量的函数。应用有限差分法对此模型的控制方程进行了离散, 并数值模拟得到了弯管内部的流场分布和压力分布。把雷诺数为 40 000 的弯管流动的实验数据和此模型的模拟结果相比较, 证明此模型是可行、可靠的。

关 键 词: 亚尺度模型; 动态模型; 湍流; 弯管; 二阶双系数; 亚格子应力

中图分类号: TV136 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-6791(2004)01-0050-06

在工程实践中,人们最感兴趣的是流动中占主导地位的大尺度运动的描述,这些大尺度的运动造成了紊流中动量和能量的输运,而大涡模拟(LES)就是通过滤波函数对 N-S 方程进行滤波的方法, 获得表示流场中大尺度运动的方程, 而近似各向同性的小尺度量对大尺度量的影响通过建立模型来模拟。同时 LES 能描写复杂流场内一些难以量测的量或难以量测的可压缩流场和旋转流场, 所以在科学研究和工程中获得了越来越多的关注。

LES 是介于 DNS 和湍流模式之间的一种直接数值模拟的方法, 最早由气象专家 Smagorinsky[1]于 1963 年提出, 他所研究的问题是全球天气预报的问题。1970 年气象学家 Deardorff[2]首次把大涡模拟用于有工程实际意义的管道内紊流的研究中, 此后, 在 Deardorff 的基础上, Schumann 等[3]在自己的研究中发展了大涡模拟, 将此方法推广于环形通道内流动的研究。基于 Smagorinsky 模型, Germano[4]于 1991 年提出一阶单系数动态模型, 采用两个滤波函数, 根据当时当地湍流动力学特性和通过在二层滤波上的亚格子应力与可解的相对亚格子应力的联系, 动态计算得到模型的 Smagorinsky 系数。此模型能给出固壁上正确的渐进关系, 还能预测能量的逆向传递, 由此动态模型的这些优点引起了越来越多的关注并被广泛地接受。D. K. Lilly, Yan Zang 等和 Sandip 等[5~7]分析并发展了此动态模型。

本文提出二阶双系数动态亚格子尺度应力模型, 模型除包括应变率张量信息之外, 还包含旋转率张量信息。最后用雷诺数为 40 000 的弯管流动的实验数据来验证此模型。

1 数值模拟

1.1 二阶双系数动态亚格子应力模型

应该指出的是 Smagorinsky 模型和一阶单系数动态模型都是涡粘度模型, 即亚格子应力只是正比于应变率张量。但由亥姆霍兹速度分解定理可知, 流体微团运动可分解为: ①以其上某参考点速度进行的平动速度; ②绕同一参考点的某瞬时轴的转动速度; ③其变形所引起的变形速度。由流体力学的建模原则, 如果一个模型除包含流动的信息越多, 这个模型将会更准确。一般认为, 涡的伸展是湍流能量由大尺度涡传向小尺度涡, 亚格子尺度应力是可解的应变率张量和旋转率张量的函数。基于以上分析, 本文提出亚格子尺度应力是可解的

收稿日期: 2002-09-22; **修订日期**: 2002-11-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50176022)

作者简介: 唐学林(1969 -), 男, 河南南阳人, 清华大学博士研究生, 主要从事流体机械内的流体流动和固液两相流动研究。
E-mail :tangxuelin @tsinghua. org. cn

应变率张量和旋转率张量的函数，即二阶双系数动态模型。

在动态涡粘度模型中，定义两个滤波算子：格子滤波 $\overline{G}$ 和检验滤波 $\widetilde{G}$。设 $\overline{G}=\overline{G}\widetilde{G}$，把 $\overline{G}$ 和 $\overline{G}$ 的两滤波函数分别作用于 N-S 方程后，得到两方程：

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u}_j\overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+g_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u}_j\overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+g_i \tag{2}$$

其中，$\tau_{ij}=\overline{u_iu_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j$，$T_{ij}=\overline{U_iU_j}-\overline{u}_i\,\overline{u}_j$，当 τ_{ij}、T_{ij} 乘以密度 ρ 后，分别是亚格子尺度应力和经双重滤波后的亚格子尺度应力，g_i 为液体的质量力。

由此，定义可解应力：$L_{ij}=T_{ij}-\tau_{ij}=\overline{U_iU_j}-\tilde{\tilde{u}}_i\,\tilde{\tilde{u}}_j$ (3)

由于模型与滤波无关，故亚格子尺度应力模型和亚检验尺度应力模型分别为

$$\tau_{ij}=-2c_1\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}-2c_2\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{kj} \tag{4}$$

$$T_{ij}=-2c_1\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}-2c_2\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{kj} \tag{5}$$

其中 $\overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right]$，$|\overline{S}|=\sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$，$\overline{R}_{ij}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j}$，$\varepsilon_{ijk}$，是循环张量，$c_1$、$c_2$ 是动态系数，$\overline{\Delta}$、$\overline{\Delta}$ 分别为格子滤波宽度和检验滤波宽度，一般取 $\overline{\Delta}=2\overline{\Delta}$。

把式 (4)、式 (5) 代入式 (3) 可得

$$L_{ij}=-2c_1\left(\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}-\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}\right)-2c_2\left(\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{ki}-\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{ik}\right)$$

令 $M_{if}=-2\left(\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}-\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}\right)$，$N_{if}=-2\left(\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{ki}-\overline{\Delta}^2\overline{R}_{ik}\overline{R}_{ik}\right)$，可得：

$$L_{ij}=c_1M_{ij}+c_2N_{ij} \tag{6}$$

利用最小二乘法，可得：

$$c_1=\frac{(L_{ij}M_{ij})(N_{kl}N_{kl})-(L_{ij}N_{ij})(M_{kl}N_{kl})}{(M_{ij}M_{ij})(N_{kl}N_{kl})-(M_{ij}N_{ij})(M_{kl}N_{kl})} \tag{7}$$

$$c_2=\frac{(L_{ij}N_{ij})(M_{kl}M_{kl})-(L_{ij}M_{ij})(M_{kl}N_{kl})}{(M_{ij}M_{ij})(N_{kl}N_{kl})-(M_{ij}N_{ij})(M_{kl}N_{kl})} \tag{8}$$

由此可得到二阶动态双系数应力模型。其中，(　)代表在平行于壁面的平面内的平均值。计算过程中系数 c_1、c_2 在空间稳定，c_1 为 0.012～0.045，c_2 为 -0.14～-0.21。

1.2　边界条件和数值方法

进口边界条件：给定均匀来流条件 $u=1$。

出口边界条件：采用第 2 类边界条件 $\partial\vec{u}/\partial\vec{n}$，$\vec{n}$ 为出口边界外法向单位矢量。

固壁边界条件：采用无滑移条件。

格子滤波和检验滤波都采用盒式滤波函数，有限差分方法离散控制方程，采用交错网格和 SIMPLEC 方法进行求解。

2　弯管几何结构及坐标系

弯管流动在工程中具有一定的代表性，如离心泵内部、水轮机的尾水管、一些飞行器的进口等处的流动都是属于弯管流动，这类流动的一个显著特点是在弯管段有明显的“二次流”，但这些设备的实验数据不易测得，

为了验证本模型的准确性、可靠性和将来的推广应用，本文研究了方形断面90°弯管内的流动，并和Taylor等的量测实验结果进行比较。

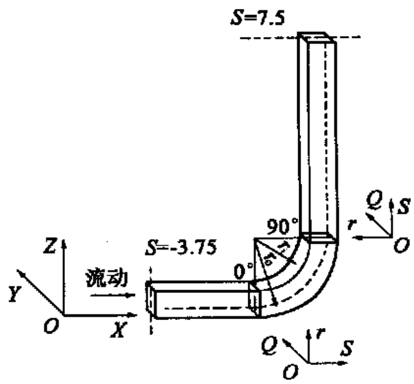

图1 弯管几何结构及坐标系

Fig. 1 Geometry of bend and coordinate definition

本文计算采用的方形弯管同Taylor等[8,9]作实验时采用的弯管尺寸相同，弯管的平均半径为92 mm，方形断面的边长为40 mm，弯管前直管段为0.15 m，弯管后直管段长度为0.30 m。如图1所示。其中，$s(S) = S/D$，S为流动方向的沿程坐标，$q(Q) = Q/D$，Q为方管宽度方向坐标，$q(0) = 0$处为壁面和$q(20) = 1/2$处为中心对称面，D为方管的截面边长，$r^* = \frac{r - r_o}{r_i - r_o}$，$r_i$、$r_o$和$r$分别为弯管的内外径和半径。

Taylor等认为方形弯管为对称结构和流动具有对称性，因而Taylor等的量测实验结果仅为方管的一半。本文在计算中所用的计算域也为方管网格的一半，计算所用的网格数为$I \times J \times K = 631 \times 61 \times 31$（$I$代表流动方向，$J$代表半径方向，$K$代表宽度方向），其中垂直于流动方向的横截面上的网格均匀分布，流动方向进口段的均匀分布网格数为150、弯管段的均匀分布网格数为180和出口段的均匀分布网格数为300。

3 计算结果和实验结果的比较分析

3.1 流动、半径两方向所在平面上的速度矢量和$s = 2.5$平面上的速度矢量

Taylor实验结果为进口段$s = -0.25$处、弯管段$\theta = 30°$、$\theta = 60$和$\theta = 77.5$处以及出口段$s = 0.25$和$s = 2.5$等处沿流动、半径两方向的速度值和出口直管段$s = 2.5$处的沿宽度方向的速度值。为了直观的比较，本文把各测量处的实验结果转换到流动、半径两方向所在平面上的速度矢量及$s = 2.5$平面上的速度矢量。

从图2、图3和图4可知：

(1) 进口直管段 弯管段对上游直管段内流速分布的影响不大，但流速分布关于方管的对称面已经不完全对称，所以二次流很弱，如$s = -0.25$处的流动已受到弯管段的略微影响；

(2) 弯管段 由于弯管迫使液体流动方向改变和离心力的作用，液速发生了变化。由弯管前半进口段的30截面上速度分布可以看出，由于弯管的堵塞大于离心力持续作用，导致弯管由内径到外径的液速稍为逐渐减小。弯管后半出口段的60和77.5截面上的流速分布表明，离心力的持续影响显著加强，内外径间的流速差逐渐减小。由此可知二次流沿流动方向进一步发展，其涡心由弯管内侧逐渐移向弯管中心；

(3) 出口直管段 直管段流速分布仍受弯管的影响，内外径间的流速差值仍在逐渐减小，但在其后半段，弯管的影响逐渐减弱，流速分布也逐渐恢复。

3.2 壁面上和对称面上的压力分布

压力系数定义为：

$$C_P = \frac{P - P_{ref}}{\frac{1}{2}\rho V_c^2}$$

其中P为某点的压力值；P_{ref}取$\theta = 0°$(即弯管入口断面处)、$r^* = 0$(即弯管外半径壁面处)、$Q = 1/2$(即方管的对称面处)点上的压力值；V_c为弯管进口的速度；ρ为水的密度。

从图5可知：在流速沿流程变化的同时，压力也经历了复杂的增压和减压过程，由于弯管进口处弯管的堵塞，弯管的内侧沿流程先减压后增压，而弯管的外侧沿流程先增压后减压，压力峰值出现在50°～60°之间；同时弯管外侧压力大于相对应的内侧压力。

由以上比较、分析可知，在流速分布、压力分布等方面，计算结果和实验结果相当吻合。

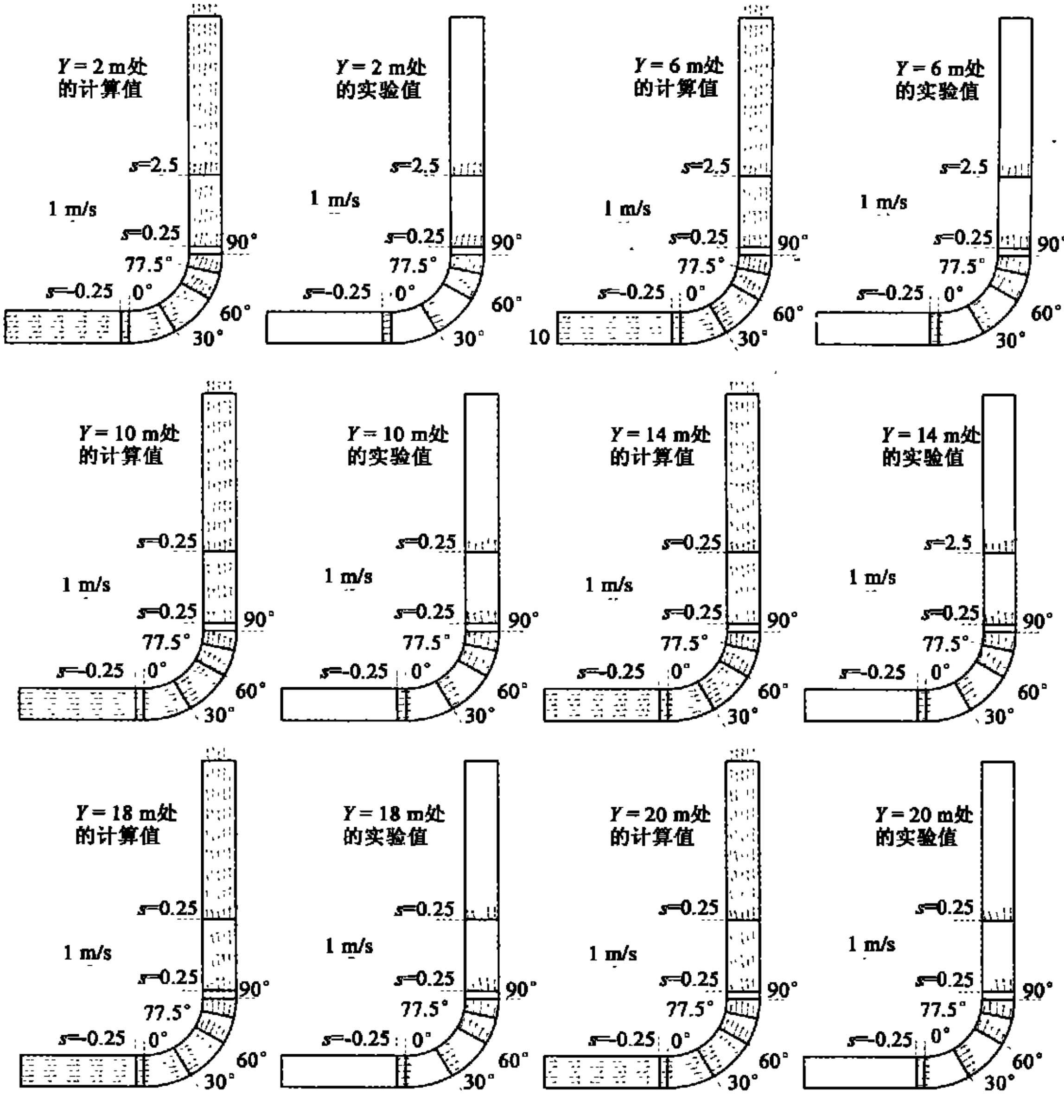

图 2 从壁面到方管中心对称面各截面 $Y = (2\ \mathrm{mm}, 6\ \mathrm{mm}, \cdots)$ 上速度矢量比较

Fig. 2 Vectors comparisons between simulations and results on $X \sim Z$ planes at $Y = (2\ \mathrm{mm}, 6\ \mathrm{mm}, \cdots)$ respectively

4 结 论

(1) 本文提出二阶双系数动态亚格子应力模型，并成功地模拟出弯管的流场和压力场；

(2) 二阶双系数动态亚格子应力模型基于 Smagorinsky 模型并克服了其缺点，其两个动态系数为动态变量，不需引进壁面函数；

(3) 与 Smagorinsky 模型和一阶单系数动态模型相比较，二阶双系数动态亚格子应力模型除包括应变率张量信息之外，还包含旋转率张量信息，所以能较好地适用于有涡流场；

(4) 和实验结果相当吻合，证明二阶双系数动态亚格子应力模型切实可行，从而为将来的模型推广应用提供了有力的验证；

(5) 将进一步研究二阶双系数动态亚格子应力模型和其他模型的数值模拟的优缺点。

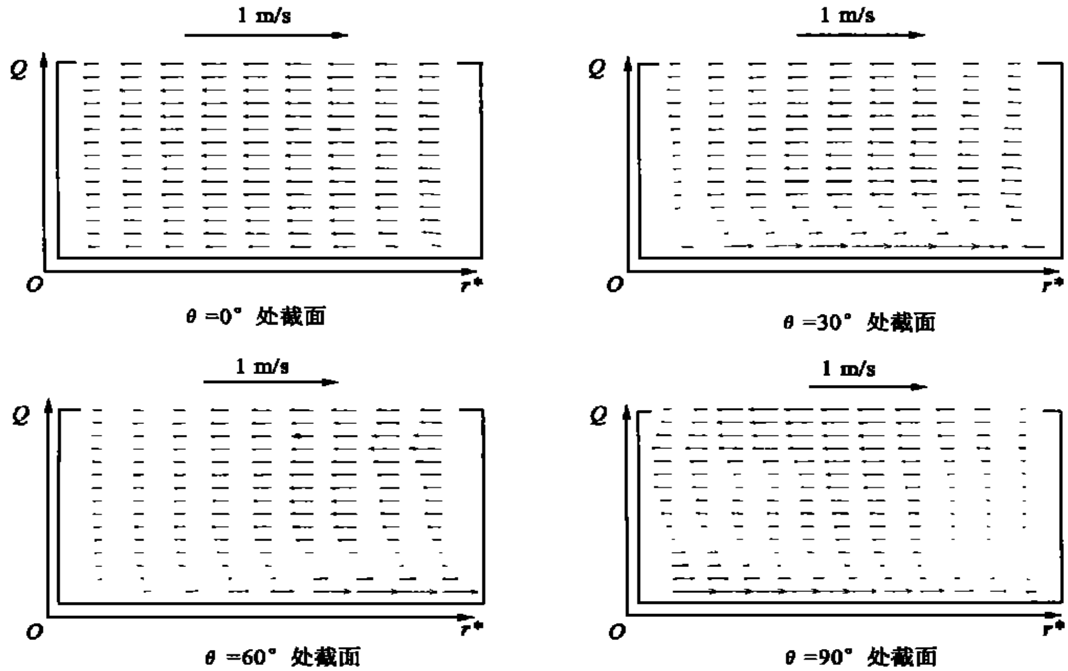

图 3 方管的弯管段各截面上的计算速度矢量

Fig. 3 Velocity vectors on the cross - section at θ= 0 °, 30 °, 60 °, 90 ° respectively

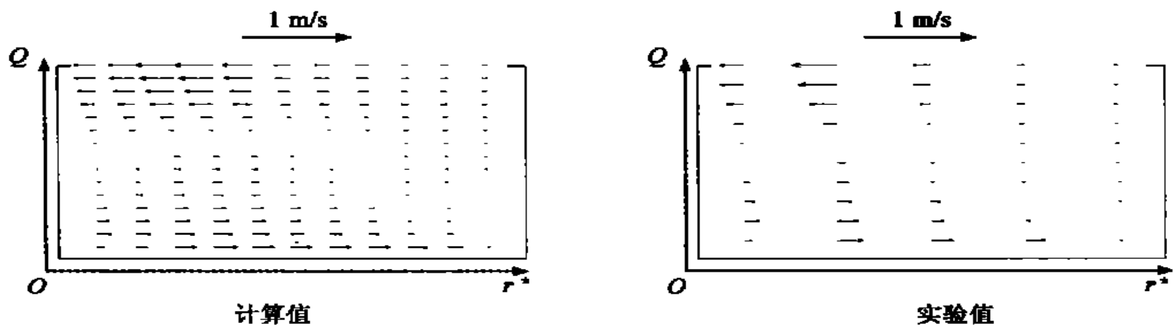

图 4 s = 2. 5 平面上的速度矢量

Fig. 4 Velocity vectors on the cross-section at s = 2. 5

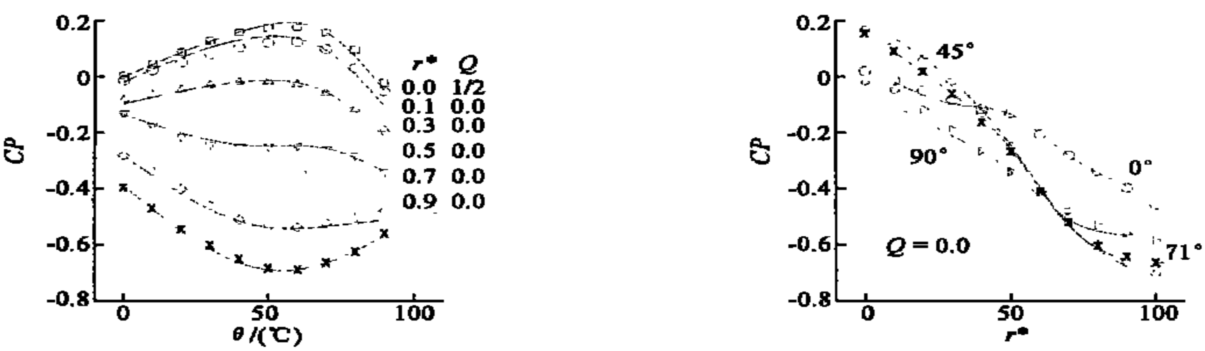

图 5 壁面上(Q = 0. 0) 和对称面上(Q = 1/ 2) 的压力分布

Fig. 5 Pressure distributions at Q = 0. 0 and Q = 1/ 2 respectively

参考文献:

[1] Smagrinsky J. General Circulation Experiments with the primitive equations I[J]. Mon Weath Rev, 1963, 91 (3): 99 - 165.

[2] Deardorff J W. A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers[J]. J Fluid Mechanics, 1970, 41 (2): 453 - 480.

[3] Schumann U. Subgrid Scale Model for Finite-Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli[J]. J Comp Phys, 1975, 18(3): 376 - 404.

[4] Germano M, Piomelli U, *et al*. A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model[J]. Phys Fluids, 1991, A3(7): 1760 - 1765.

[5] Lilly D K. A proposed modification of the Germano subgrid - scale closure method[J]. Phys Fluids A, 1992, 4(3): 633 - 635.

[6] Yan Zang, Robert L Street, Jeffrey R Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculation flows[J]. Phys Fluids A, 1993, 5(12): 3186 - 3196.

[7] Sandip Ghosal, Thomas S Lund, *et al*. A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows[J]. J Fluid Mech, 1995, 286: 229 - 255.

[8] Taylor A M, Whitelaw J H, *et al*. Curved Ducts with Strong Secondary Motion: Velocity Measurements of Developing Laminar and Turbulent Flow[J]. J Of Fluids Engineering, 1982, 104(3): 350 - 359.

[9] Humphrey J A C, Whitelaw J H, *et al*. Turbulent flow in a square duct with strong curvature[J]. J Fluid Mech, 1981, 103: 443 - 463.

[10] Joel H. Ferziger Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence[J]. Transaction of the Japan. Society of Mechanical Engineers(B), 2000, 66 (651): 2 - 11.

Second-order dynamic sub-grid-scale stress model with double coefficients*

TANG Xue-lin, QIAN Zhong-dong, WU Yu-lin

(Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, *China)*

Abstract: Based on the Cauchy-Helmholtz theorem and the Smagorinsky model, a second-order dynamic sub-grid-scale (SGS) model with two dynamic coefficents is proposed, in which the sub-grid scale stress is the function of both strain-rate tensor and rotation-rate tensor. The velocity and pressure fields are calculated by using the simplec algorithm and the finite difference approximation to discretice the governing equations. Compatison between computational and experimental results of velovity and pressure fields in a curving conduit is conducted. The computarional results are in good agreement with the experimental ones.

Key words: sub-grid-scale model; dynamic model; turbulent flow; curving conduit; second-order with double coefficients; sub-grid-scale stress

* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 50176022).