第 15 卷 第 2 期
2004 年 3 月

水 科 学 进 展
ADVANCES IN WATER SCIENCE

Vol. 15, No. 2
Mar., 2004

流域汇流的概率论体系探讨

芮 孝 芳

(河海大学水资源环境学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 基于统计物理学观点, 给出了净雨过程和流域出口断面流量过程的概率论解释。在此基础上, 应用概率论中随机变数函数分布的理论导出了卷积公式, 获得了不同于 Rodriguez-Iturbe 等对流域瞬时单位线所作的概率解释, 且前提条件更为明确。证明了流域瞬时单位线的一阶原点矩、流域滞时和平均流域汇流时间是完全等价的, 从而为计算平均流域汇流时间提供了一个概念明晰、操作简便的计算方法。给出了两个应用概率论方法确定流域瞬时单位线的方法, 其中之一是笔者提出的。

关 键 词: 流域汇流; 概率论; 卷积公式; 流域瞬时单位线; 流域滞时; 流域汇流时间

中图分类号: P333.2　　文献标识码: A　　文章编号: 1001-6791(2004)02-0135-05

Penman 早在 1961 年就言简意赅地指出, 水文学是一门回答"what happens to the rain(降雨后将发生什么)?"的科学[1], 流域汇流则是其中核心内容之一。现在已有多种探讨流域汇流机理和建立流域汇流计算方法的途径[2,3,5,6]。从随机观点出发, 借助统计物理学方法探讨流域汇流机理, 并确定流域瞬时单位线的途径是由 Rodriguez-Iturbe 等于 1979 年首开先河的[3], 他们给出了流域瞬时单位线的概率解释, 提出了确定流域瞬时单位线的 R-V 方法。本文旨在应用概率论理论, 给出净雨过程和相应的流域出口断面流量过程的概率解释; 并在此基础上探讨卷积公式的概率解释, 进而从另一个角度再次解释流域瞬时单位线的概率意义。此外, 还将应用概率论理论证明流域瞬时单位线一阶原点矩、流域滞时和平均流域汇流时间三者之间的等价性, 提出一个比较客观、方便的由实测降雨径流资料确定平均流域汇流时间的方法。最后列举两个应用概率论理论确定流域瞬时单位线的方法。

1 净雨过程和流域出口断面流量过程的概率解释

1.1 净雨过程的概率解释

大气中凝结有大量的水滴。这些水滴一般将以降雨的形式在不同时刻降落到流域表面, 扣除损失后即成为净雨滴。假设任一时刻降落到流域表面的净雨滴空间分布均匀。不难设想, 这些净雨滴将在何时降落到流域表面, 可视为一随机事件, 以 S 表示。取统计时段长为 Δs, 这样就可以将整个净雨历时按 Δs 划分成若干个时段。若统计每一净雨时段内降落到流域表面的净雨量, 计算其占全部净雨量的比例, 则这个比例显然就是净雨滴在时段内降落到流域表面的概率。因此, 通过产流计算所得到的净雨过程, 作归一化处理, 并取 $\Delta s \to 0$, 即为以净雨降落时间为随机变量的分布密度, 其数学表达为

$$f_h(s) = \frac{h(s)}{\int_0^{\infty} h(s)\,\mathrm{d}s} \tag{1}$$

式中 $f_h(s)$ 为净雨降落时间的分布密度; $h(s)$ 为净雨过程; s 为随机变量 S 的具体取值。

收稿日期: 2003-05-27; 修订日期: 2003-07-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50309002)
作者简介: 芮孝芳(1939-), 男, 江苏溧阳人, 河海大学水资源环境学院教授, 主要从事水文及水资源学的教学与研究。

1.2 流域出口断面流量过程的概率解释

到达流域表面的净雨滴，经由坡地汇流和河网汇流即流域汇流，将组成流域出口断面不同时刻的流量。由于同一时刻降落到流域表面的净雨滴，其注入点不仅离流域出口断面的远近不同，而且各自流速不同，因此，同样可将到达流域表面的净雨滴将在何时流达流域出口断面视作一随机事件，用 T 表示。取统计时段长为 Δt，并将流域出口断面流量过程的总历时按 Δt 划分成若干个时段。若统计在每一流量时段内到达流域出口断面的净雨量，计算其占全部净雨量的比例，则这个比例显然就是净雨滴在该时段内到达流域出口断面的概率。因此，对流域出口断面流量过程作归一化处理，并取 $\Delta t \rightarrow 0$，就可视其为以净雨滴在流域出口断面出现时间为随机变量的分布密度，其数学表达为

$$f_Q(t) = \frac{Q(t)}{\int_0^{\infty} Q(t)\,\mathrm{g}t} \tag{2}$$

式中 $f_Q(t)$ 为净雨滴在流域出口断面出现时间的分布密度；$Q(t)$ 为流域出口断面流量过程；t 为随机变量 T 的具体取值。

2 卷积公式和流域瞬时单位线的概率解释

前已述及，净雨滴降落到流域表面的时间为 S，若令净雨滴从其在流域上的注入点汇集到流域出口断面的时间为 Σ，则净雨滴从降落开始，最终到达流域出口断面的时间 T 显然为

$$T = S + \Sigma \tag{3}$$

式(3)表明，流域出口断面流量出现时间 T 这一随机变量，是净雨滴降落到流域表面时间 S 和净雨滴流域汇流时间 Σ 两个随机变量之和。

前已证明，随机变量 S 和 T 的分布密度分别为 $f_h(s)$ 和 $f_Q(t)$。若令 $f_B(\tau)$ 为净雨滴的流域汇流时间 Σ 的分布密度，并假设 S 与 Σ 相互独立，则根据概率论中随机变数函数的分布理论，由式(3)可导得[7]：

$$f_Q(t) = \int_0^t f_B(t-\tau) f_h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad f_Q(t) = \int_0^t f_B(\tau) f_h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

又由流域汇流阶段的水量平衡关系知：

$$\int_0^{\infty} Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

将式(4) 乘以式(5)，并考虑式(2) 和式(1)，得

$$Q(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad Q(t) = \int_0^t f_B(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

式(6)就是应用概率论理论导出的流域出口断面流量过程 $Q(t)$ 与相应的净雨过程 $h(t)$ 之间的定量关系式。

从流域汇流的系统动力学理论也可得到流域出口断面流量过程 $Q(t)$ 与相应的净雨过程 $h(t)$ 之间的定量关系式，即下列卷积公式[2]：

$$Q(t) = \int_0^t u(t-\tau)\, h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad Q(t) = \int_0^t u(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

式中 $u(t)$ 称为流域瞬时单位线。

比较式(6)和式(7)可见，式(6)不仅是式(7)在概率论中的诠释，而且式(7)中的流域瞬时单位线 $u(t)$ 就是式(6)中的净雨滴流域汇流时间的分布密度，即

$$u(t) = f_B(t) \tag{8}$$

式(8)表达的结论与文献[3]完全相同，但这里的前提是净雨空间分布均匀，且净雨降落时间与流域汇流时间相互独立。这就比文献[3]阐述的前提条件更加明确，便于掌握。

3　流域滞时与平均流域汇流时间

在流域汇流中，流域滞时是指流域出口断面流量过程形心与相应的净雨过程形心之间的时距，也就是流域出口断面流量过程一阶原点矩与相应的净雨过程一阶原点矩之差值(图 1)：

$$L = M_1(Q) - M_1(h) \tag{9}$$

式中　L 为流域滞时；$M_1(Q)$ 和 $M_1(h)$ 分别为流域出口断面流量过程和相应的净雨过程的一阶原点矩。

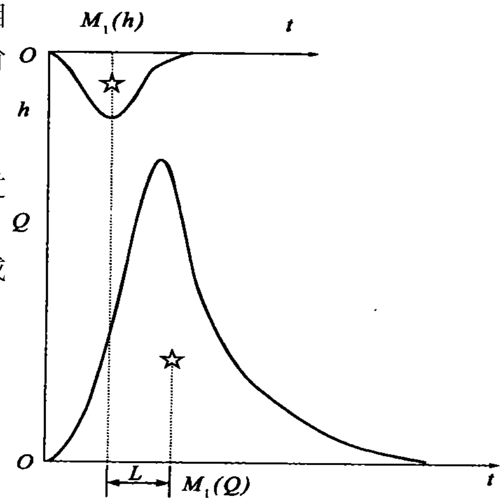

图 1　流域滞时定义图

Fig. 1　Sketch of definition for lag time of watershed

早在 1967 年 Diskin 就借助于 Laplace 变换证明了由式(7) 或式(6) 表达的三个函数的原点矩和中心矩之间分别有如下关系[4]：

$$M_k(Q) = M_k(u) + kM_1(h)M_{k-1}(u) + \frac{k(k-1)}{2!}M_2(h)M_{k-2}(u) + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}M_3(h)M_{k-3}(u) + \cdots + M_k(h) \tag{10}$$

$$N_k(Q) = N_k(u) + kN_1(h)N_{k-1}(u) + \frac{k(k-1)}{2!}N_2(h)N_{k-2}(u) + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}N_3(h)N_{k-3}(u) + \cdots + N_k(h) \tag{11}$$

式中　$M_1(Q)$、$M_2(Q)$、…、$M_k(Q)$ 分别为流域出口断面流量过程的一阶原点矩、二阶原点矩、…、k 阶原点矩；$M_1(h)$、$M_2(h)$、…、$M_k(h)$ 分别为净雨过程的一阶原点矩、二阶原点矩、…、k 阶原点矩；$M_1(u)$、$M_2(u)$、…、$M_k(u)$ 分别为流域瞬时单位线的一阶原点矩、二阶原点矩、…、k 阶原点矩；$N_2(Q)$、…、$N_k(Q)$ 分别为流域出口断面流量过程的二阶中心矩、…、k 阶中心矩；$N_2(h)$、…、$N_k(h)$ 分别为净雨过程的二阶中心矩、…、k 阶中心矩；$N_2(u)$、…、$N_k(u)$ 分别为流域瞬时单位线的二阶中心矩、…、k 阶中心矩。

特别地，对于一阶原点矩，有

$$M_1(Q) = M_1(h) + M_1(u) \tag{12}$$

对于二阶中心矩，有

$$N_2(Q) = N_2(h) + N_2(u) \tag{13}$$

比较式(9) 和式(12)，不难得出：

$$L = M_1(u) \tag{14}$$

式(14) 表明，流域滞时就是流域瞬时单位线的一阶原点矩。

与河段的上断面流量过程线作为河段汇流的输入具有垂向分散性不同，净雨作为流域汇流的输入具有平面分散性，因此，从水动力学观点看，对于一场空间分布均匀的净雨，净雨滴到达流域出口断面的汇流时间的平面分布可记为：

$$\tau = \tau(x, y) \tag{15}$$

式中　x、y 为平面坐标系的横、纵坐标值。在这种情况下，人们自然想到用平均流域汇流时间来度量一个流域的流域汇流时间。

根据式(15)，显然有

$$\bar{\tau} = \frac{1}{A}\iint_A \tau(x, y)\,dx\,dy \tag{16}$$

式中　$\bar{\tau}$ 为平均流域汇流时间；A 为流域面积。

式(16) 虽然给出了 $\bar{\tau}$ 的明确的物理意义，但按式(16) 确定 $\bar{\tau}$ 却是难以办到的。前已证明，流域瞬时单位线就是净雨滴的到达流域出口断面的汇流时间的分布密度，因此，平均流域汇流时间又可表达为

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau u(t)\,\mathrm{d}\tau = M_1(u) \tag{17}$$

式(17)表明, 平均流域汇流时间就是流域瞬时单位线的一阶原点矩。

综合式(14)和式(17)可知, 在流域汇流中, 流域滞时、平均流域汇流时间和流域瞬时单位线一阶原点矩是完全等价的。这一关系的被揭示, 显然为根据实测降雨、径流对应资料计算平均流域汇流时间, 或者根据已确定的流域瞬时单位线计算平均流域汇流时间提供了理论依据。

此外, 由上述确定平均流域汇流时间的原理可知, 对一个流域而言, 不同次雨洪的平均流域汇流时间各异的主要原因是受局部产流和净雨空间分布不均匀的影响。

4 确定流域瞬时单位线的概率论方法

4.1 R-V 方法

Rodriguez-Iturbe 等[3]认为, 净雨滴在流域上的汇流路径由状态串联而成, 状态又可分为各级坡面状态和各级河流状态。净雨滴选择哪条路径 W 到达流域出口断面具有一定的概率, 称此为路径概率, 用 $p(w)$ 表示。根据流域汇流中状态转移的原理, 通过转移概率分析可求得路径概率。此外, 净雨滴在每一个状态都需要等待时间, 组成一条路径的各状态的等待时间之和就是净雨滴经由这条路径流达流域出口断面的汇流时间。净雨滴在每一个状态的等待时间也是个随机变量, 其分布密度记为 $f_{x_k}(t)$, 这里 x_k 表示某个状态, $k=1, 2, \cdots$。这样, Rodriguez-Iturbe 就导出了下列流域瞬时单位线表达式:

$$u(t) = f_B(t) = \sum_{w \in W} f_{x_1}(t) * f_{x_2}(t) * \cdots * f_{x_k}(t) \cdot p(w) \tag{18}$$

$$p(w) = \pi_{x_1} p_{x_1 x_2} \cdot p_{x_2 x_3} \cdot \cdots \cdot p_{x_{k-1} x_k} \tag{19}$$

式中 w 为某条路径; W 为路径的集合。$W = \{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{2^{\Omega-1}}\}$, Ω 为流域的级; π_{x_1} 为初始状态概率; $p_{x_{k-1} x_k}$ 为由 x_{k-1} 状态转移到 x_k 状态的概率, $k=1, 2, \cdots$; "$\in$"表示"属于"; "$*$"表示"卷积"。

式(18)就是用 R-V 方法确定流域瞬时单位线的基本关系式, 方法步骤见文献[2]或文献[6]。

4.2 流路及坡度分布律组合方法

由于净雨滴的流域汇流时间可表达为

$$T = \frac{L}{V} \tag{20}$$

式中 T 为净雨滴的流域汇流时间; L 为净雨滴汇集到流域出口断面的流路长度; V 为净雨滴向流域出口断面汇集的速度。显然, T、L 和 V 均为随机变量, 且易于理解 L 和 V 是相互独立的。

因此, 笔者提出[5], 根据概率论中机率组合理论[7], 应有

$$u(t) = f_B(t) = \int_0^{v_{\max}} v\, g(vt)\, \varphi(v)\,\mathrm{d}v \tag{21}$$

式中 $g(l)$、$\varphi(v)$ 分别为 L 和 V 的分布密度; $v_{\max}$ 为流域中净雨滴的最大速度。

式(21)表明, 只要能求得净雨滴路径长度的分布密度 $g(l)$ 和净雨滴速度的分布密度 $\varphi(v)$, 则就可以利用该式求得流域瞬时单位线。

在文献[5]中, 笔者已详细给出了基于数字高程模型(DEM)确定 $g(l)$ 的方法, 根据 DEM 及流速公式确定 $\varphi(v)$ 的方法, 并给出了算例。

5 结 论

雨滴从大气中降落到流域上及继续向流域出口断面汇集这两个现象都是随机事件。基于此, 得出了降雨强度过程线就是雨滴降落时间的密度函数。流域出口断面流量过程线就是雨滴从开始降落至流达流域出口断面花费时间的密度函数的结论。从而从机理上加深了对降雨强度过程线和流域出口断面流量过程线的认识。

由于雨滴从开始降落至流达流域出口断面花费的时间，是其降落到流域的时间与其从流域上某处汇集到流域出口断面的汇流时间之和，因此，应用概率论中推求随机变数和的概率分布的理论，又一次揭示了流域瞬时单位线就是雨滴在流域上汇集的汇流时间的密度函数的事实，而且又一次证明了降雨过程线、流域出口断面流量过程线和流域瞬时单位线三者之间是卷积分关系的事实。前者的另一种推导思路是 Rodriguez-Iturbe 等给出的。后者的另一种推导途径就是熟知的线性系统动力学分析法。

应用概率论理论还证明了流域滞时与流域平均汇流时间是两个完全相同的概念。由于流域滞时容易由实测降雨径流资料获得，因此这一结论，不仅赋予流域滞时更为明确的物理意义，而且为客观、科学地确定流域平均汇流时间提供了容易操作的计算方法。

流域瞬时单位线即为雨滴汇流时间密度函数这一结论的科学价值还在于：不仅为寻求流域瞬时单位线提供了与传统方法完全不同的新途径，而且为从理论上建立流域汇流特征与流域地形地貌特征之间的关系提供了理论基础和具体方法。文中举出的建立在概率论基础上并借助于 DEM 技术确定流域瞬时单位线的两个方法就是这方面的实例。

参考文献：

[1] Singh V P, D A Woolhiser. Mathematical modeling of watershed hudrology[J]. J of Hydrologic Engineering, 2002, 7(4): 270-292.

[2] Rodriguez-Iturbe I, Rinaldo A. Fractal river basins[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[3] Rodriguez-Iturbe I, J B Valdes. The geomorphological structure of hydrologic response[J]. Water Resour Res, 1979, 15(5): 1409-1420.

[4] Diskin M D. A Laplace transform proof of the theorem of moments for the IUH[J]. Water Resour Res, 1967, 3(2): 385-388.

[5] 芮孝芳. 应用流路长度分布律和坡度分布律确定地貌瞬时单位线的研究[J]. 水科学进展, 2003, 14(5): 602-606.

[6] 芮孝芳. 产汇流理论[M]. 北京：水利电力出版社, 1995.

[7] 复旦大学数学系. 概率论与数理统计[M]. 上海：上海科学技术出版社, 1960.

Study of mechanism of watershed concentration flow based on probability theory*

RUI Xiao-fang

(*College of Water Resources and Environment, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: Based on view of the probability theory, probability explanations of net tainfall process over watershed and discharge hydrograph of watershed outlet are given. On the basis of these, the convolution integral equation is derived by theory of distributed function of random variate in probability theory, and probability meaning of the instantaneous unit hydrograph (IUH) of watershed is again obtained under obviouser conditions. Equivalent relationship among first order moment about the origin of IUH of watershed, lag time of watershed and average concentration flow time of watershed is proved, and a computational method of average concentration flow time of watershed is given. Finally, two methods of determining the IUH of watershed are presented by means of probability theory.

Key words: concentration flow of watershed; probability theory; convolution integral equation; instantaneous unit hydrograph of watershed; lag time of watershed; concentration flow time of watershed

* The project is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 50309002).