

蒙特卡罗法在势流计算中的应用研究

吉庆丰¹, 郑邦民²

(1. 扬州大学水利科学与工程学院, 江苏 扬州 225009; 2. 武汉大学水利水电学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 针对水动力学实际问题多存在复杂几何边界的状况, 提出了用不规则游动网格求解偏微分方程的蒙特卡罗法, 建立了相应的随机游动模型。选择具有复杂自由面的堰闸流动问题作为算例, 验证了新方法的正确性。与有限元法相比, 蒙特卡罗法解势流等线性问题时更灵活, 可以根据需要, 单独计算流动区域内任意一点的未知物理量, 且所用计算容量较少。

关键词: 蒙特卡罗法; 不规则游动网格; 随机游动模型; 复杂边界; 势流

中图分类号: TV131.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2004)04-0415-05

蒙特卡罗法不仅可以求解随机性问题, 而且可以求解诸如非线性方程、多重积分、常微分方程和偏微分方程等多种确定性问题^[1,2]。与有限差分法、有限元法等常用数值方法相比, 蒙特卡罗法在求解确定性问题时虽显得有些“笨”, 但仍有显著的优点, 比如对线性问题, 可以单独就计算区域内任意一点作计算, 其值无需通过联解其它结点值求出; 计算稳定性较好; 便于并行计算等。因此, 对蒙特卡罗法进行研究具有一定的理论和实际应用价值。

以前用蒙特卡罗法求解水动力学问题时, 采用的游动网格均为规则网格, 如矩形网格, 对不规则边界问题, 由于边界的近似处理, 计算精度受到了很大的影响。为了克服这一缺点, 本文提出了不规则游动网格的蒙特卡罗法。这种方法改善了蒙特卡罗法求解复杂边界问题的精度, 拓宽了蒙特卡罗法在水动力学中的应用范围。本文以理论上较成熟、计算亦较简单的势流问题为例, 介绍不规则游动网格蒙特卡罗法的具体做法, 以便突出方法本身的优点。

1 随机游动模型的建立

蒙特卡罗法的关键在于建立一个正确可行的随机游动模型。为简便起见, 本文以二维 Laplace 方程的边值问题为例, 给出不规则游动网格的随机游动模型。方程及边界条件为

$$\Delta(P) = 0 \quad P \in D \quad (1)$$

$$\Delta(Q) = f(Q) \quad Q \in \Gamma \quad (2)$$

式中 D 为一个任意形状的平面区域; Γ 为 D 的边界; P 为 D 内的点; Q 为边界 Γ 上的点。

将区域 D 剖分成若干个三角形(也可以是四边形或其它形状)的子区域 $D^{(e)}$, $D = \bigcup D^{(e)}$, 并选三角形的顶点为结点。 P 是区域内的任一结点, 与 P 相邻的结点是 $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}$, 如图 1 所示。由控制方程建立 P 结点与其相邻的 n 个结点之间未知变量 P 的关系式:

$$\Delta(P) = \sum_{i=1}^n p_{1i} \Delta(P_{1i}) \quad (P_{1i}) \quad (3)$$

收稿日期: 2003-04-25; 修订日期: 2003-07-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50279044)

作者简介: 吉庆丰(1964-), 男, 江苏高邮人, 扬州大学副教授, 博士, 主要从事水力学教学与研究。

E-mail: jqfcc@yzcn.net

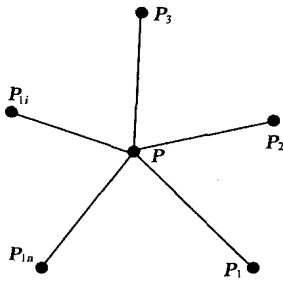


图1 结点 P 与其相邻结点
Fig.1 Node P and its neighboring nodes

式中 $p_{1i}(P)$ 为关系系数, $\sum_{i=1}^n p_{1i}(P) = 1, 0 \leq p_{1i}(P) \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。

为了求函数 g 在结点 P 处的值 $g(P)$, 构造一个随机游动模式如下:

设一质点自结点 P 处出发, 按照转移概率 $p_{11}(P), p_{12}(P), \dots, p_{1n}(P)$ 向与 P 相邻的 n 个结点 $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}$ 处随机移动一步。若质点第一步到达的位置是 P_{1i} , 再按转移概率 $p_{21}(P_{1i}), p_{22}(P_{1i}), \dots, p_{2m}(P_{1i})$ 向与 P_{1i} 相邻的 m 个结点处随机移动一步。如此重复下去, 直到该质点第一次到达一个边界结点 Q 处时, 游动即告终止。

按照下面的方式定义一个随机变量 ξ 。设随机游动路线为

$$p: P \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow Q$$

对于这样一条游动路线, 定义随机变量的值为

$$\xi = g(p) = f(Q) \tag{4}$$

若质点游动的出发点是边界结点 Q , 则它就停留在点 Q 处, 这时定义 ξ 的值为

$$\xi = g(Q) = f(Q) \tag{5}$$

下面将要证明, 这样定义的随机变量 ξ 的期望值 $E(\xi) = g(P)$ 。把由 P 点开始而在边界 Γ 上终止的游动称为一次随机游动。一次随机游动就得到随机变量 ξ 的一个取值, 经过 N 次随机游动, 就会获得 N 个随机变量值 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, 算术平均值 $\bar{\xi}$ 就可作为 $g(P)$ 的近似值。

上述随机游动模型的基本思想对其它形式的偏微分方程及边界条件仍然适用^[3]。

2 随机游动模型的简要证明

若能证明上述定义的随机变量 ξ 的期望值 $E(\xi) = g(P)$, 那么通过计算 $E(\xi)$ 的估值就能获得 $g(P)$ 的近似值。现在证明

$$E(\xi) = E(g(p)) = g(P) \tag{6}$$

由于假设定解问题的解是唯一的, 所以只需证明

$$E(g(p)) = \sum_{i=1}^n p_{1i}(P) E(g(p_{1i})) \quad P \in D \tag{7}$$

和 $E(g(Q)) = f(Q) \quad Q \in \Gamma \tag{8}$

假设沿线路 p 游动的概率为 $P_r(p)$, 那么按照数学期望的定义有

$$E(g(p)) = \sum_{p \in \Gamma} g(p) P_r(p) \tag{9}$$

注意到, 沿线路 p 游动的事件可以分为 n 个互不相容事件之和: 由点 P 出发第一步到达点 $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}$, 而后沿路线 $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ 游动的事件。若将 p 看成是由 $P \rightarrow P_{1i}$ 和 p_{1i} 两条路线组成的, 那么对于 $P \rightarrow P_{1i}$ 这一步来讲, 随机变量 ξ 应取的值是 0, 而对于 p_{1i} 这条路线来讲, ξ 应取值为 $g(p_{1i})$, 又 $P_r(P \rightarrow P_{1i}) = p_{1i}(P), \sum_{i=1}^n P_r(p_{1i}) = 1$, 于是

$$\begin{aligned} E(g(p)) &= \sum_{p \in \Gamma} g(p) P_r(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{p_{1i}} [0 + g(p_{1i})] P_r(P \rightarrow P_{1i}) P_r(p_{1i}) = \\ &= \sum_{i=1}^n P_r(P \rightarrow P_{1i}) \sum_{p_{1i}} g(p_{1i}) P_r(p_{1i}) = \sum_{i=1}^n p_{1i}(P) E(g(p_{1i})) \end{aligned}$$

式(7)证毕。

对于每一个边界结点 Q ，按数学期望的定义有

$$E(g(Q)) = \sum_{i=Q} g(Q) P_r(Q) \quad (10)$$

式中 Q 表示自结点 Q 处出发而终止在边界上的游动路线，这样的游动路线只有一条，即质点从一开始就停止在点 Q 处，没有任何移动，所以 $P_r(Q) = 1$ ，最后得到

$$E(g(Q)) = \sum_{i=Q} g(Q) P_r(Q) = \sum_{i=Q} g(Q) \cdot 1 = g(Q) = f(Q)$$

式(8)证毕。

至此，已简要地证明了式(6)成立。

3 数值试验

选用了既简单又有代表性的平面二维圆柱绕流问题进行数值试验，验证新方法的正确性，比较不规则游动网格蒙特卡罗法与有限元法在计算时间、计算精度、所用计算容量等方面的优缺点。圆柱绕流的计算区域、控制方程及边界条件同文献[4]，计算时采用的网格为73个结点、110个单元的三角形网格。

数值试验在奔腾微机上进行。有限元法的全场计算时间约为2s，计算结果与近似解析解的最大相对偏差为0.46%。蒙特卡罗法在 $N = 100, 500, 1000, 5000$ 时，全场计算时间分别约为2、6、9和37s，平均单点计算时间约为0.03、0.08、0.12和0.51s，与近似解析解的最大相对偏差分别为7.35%、1.19%、0.86%和0.53%。在计算精度相当的情况下，蒙特卡罗法计算全场的速度比有限元法要慢得多，但对于局部区域求解问题，其计算速度并不慢。有限元法在求解过程中需计算刚度矩阵，所用计算容量随计算结点总数的增加而显著增加，而蒙特卡罗法在求解过程中只涉及局部几个结点的计算，不需要计算刚度矩阵，所用计算容量较少。

4 算例

在玻璃水槽中，对江苏徐洪河沙集闸站的泄洪闸做过断面模型试验，测定了多种水位、闸门开度组合下的过闸流量、流量系数及堰面压力，本文选用这一泄洪闸为计算对象。该泄洪闸堰顶设一平板闸门，泄流堰面采用WES曲线，曲线方程为 $y = -x^{1.85}/2H_d^{0.85}$ ，其中设计水头 = 7.5 m，图2是流动区域及初始的随机游动网格。定解问题同文献[4]。

4.1 自由表面及流量的调整

在本文讨论的问题中，闸前水深 H 为已知值，过闸单宽流量 q 和自由面形状 $y = y_s(x)$ 都未知，需进行迭代求解。根据蒙特卡罗法的特点，提出如下自由表面和流量的迭代计算方法：

- (1) 假定流量的近似值为 $q^{(0)}$ ，自由面形状的初始曲线为 $y = y_s^{(0)}(x)$ 。
- (2) 在给定的 $q^{(n)}$ 值与 $y = y_s^{(n)}(x)$ 前提下 ($n = 0, 1, 2, \dots$)，将自由面的边界条件提为

$$|_{AB} = q^{(n)} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{CD} = \sqrt{2g(H_0 - y_s^{(n)})} \quad (12)$$

- (3) 根据边界条件及方程，运用蒙特卡罗法，求出 AB 边界相邻层结点上的流函数近似解 $\psi^{(n)}$ ，由此再求

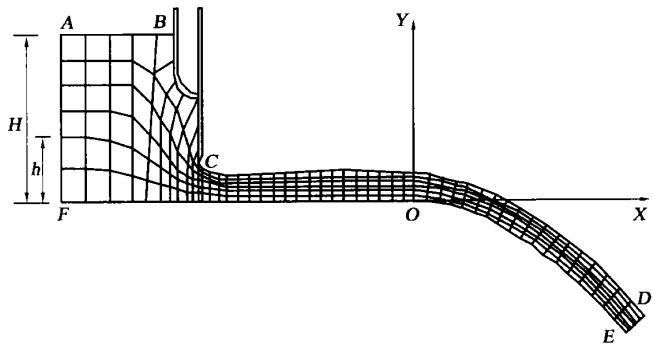


图2 流动区域及初始随机游动网格

Fig.2 Flow domain and initial random walk grid

出 AB 边界结点上的流速 V_{AB} ; 求出 CD 边界结点上的近似解 $q_{CD}^{(n)}$ 。

(4) 校核自由面条件, 在 AB 上记 $h^{(n)} = H_0 - (y_s^{(n)} + V_{AB}^2/2g)$; 在 CD 上记 $h^{(n)} = q^{(n)} - q_{CD}^{(n)}$, 若 $|h^{(n)}|$ 、 $|q^{(n)} - q_{CD}^{(n)}|$ 小于给定的迭代误差, 则求解成功, 否则对 $q^{(n)}$ 值与 $y = y_s^{(n)}(x)$ 进行修正。

(5) 以闸门下端出流点 C 计算所获得的流函数值 $q_C^{(n)}$ 作为下一次流量调整值, 即 $q^{(n+1)} = q_C^{(n)}$ 。自由面位置的调整方式, 可在已调整的 $q^{(n+1)}$ 基础上进行。假定自由面上每一个结点 i 沿原来自由面的法线方向增加一个修正值 n_i , 使

$$n_i = \frac{q^{(n+1)} - q_i^{(n)}}{\sqrt{2g(H_0 - y_{si}^{(n)})}}$$

记结点 i 处自由面切线与 x 轴夹角为 α_i , i 点的坐标 x_i 、 y_i 的调整增量分别为 $x_i = -n_i \sin \alpha_i$ 、 $y_i = n_i \cos \alpha_i$, 于是可获得新的自由面位置 $y = y_s^{(n+1)}(x)$ 。

(6) 重复迭代第 2 步至第 5 步, 直至获得收敛解。

4.2 计算结果

运用不规则游动网格的蒙特卡罗法, 对选定的江苏徐洪河沙集闸站泄洪闸这一算例作了多组计算, 下面给出部分结果。

取闸前水深 $H = 6.5$ m (闸底板高程为 15.0 m, 闸上游水位为 21.5 m), 闸门开度 $e = 0.25$ 、0.5、0.75、0.9、1.15、1.35、1.5、1.75、1.825 m, 用蒙特卡罗法计算过闸流量、流量系数及堰面压力。图 3 给出了流量系数 μ 与闸门相对开度 e/H 的关系曲线, 图 4 给出了堰面压力水头 p/γ 的计算结果。

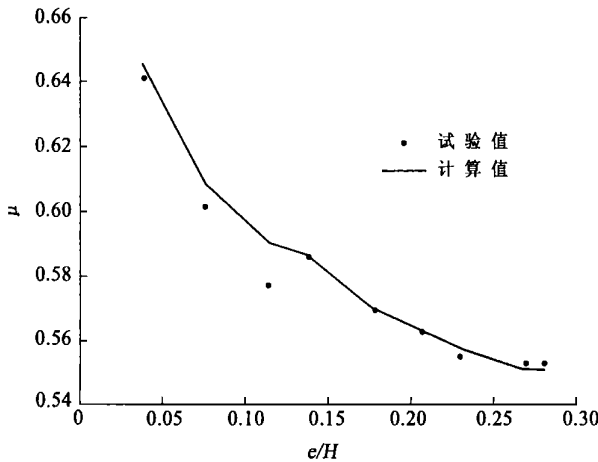


图 3 流量系数 μ 与闸门相对开度 e/H 的关系曲线

Fig.3 Relationship between discharge coefficient μ and gate opening e/H

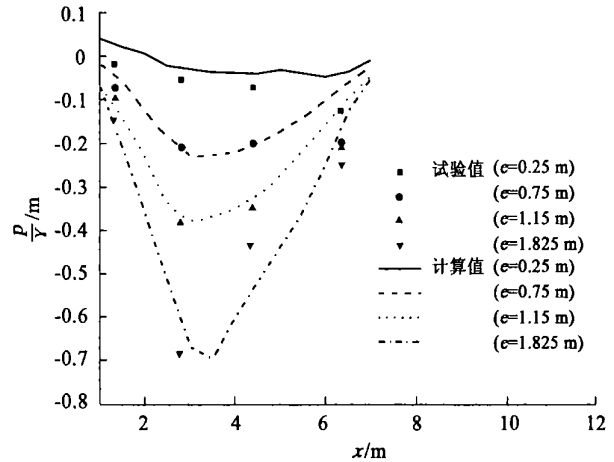


图 4 堰面压力分布

Fig.4 Pressure distribution of crest surface

从图中可以看出, 流量系数的计算值与试验值吻合很好。堰面压力的计算值与试验值总趋势是一致的, $e = 0.25$ 、1.825 m 时, 计算值与试验值相差稍大一些, 4 组计算结果在 $x = 1.33$ 、2.81、4.38、6.35 m 处, 与试验值的最大相对偏差分别为 16.2%、6.5%、8.1%、17.7%。

5 结 语

不规则游动网格的蒙特卡罗法, 提高了蒙特卡罗法求解复杂边界问题的精度, 拓宽了蒙特卡罗法在水动力学中的应用范围。在计算精度相当的情况下, 蒙特卡罗法计算全场的速度比有限元法要慢得多, 但对于势流这样的线性问题, 蒙特卡罗法可根据需要, 独立地进行局部区域相关物理量的计算问题, 其局部计算速度并不

慢。有限元法在求解过程中需计算刚度矩阵，所用计算容量随计算结点总数的增加而显著增加，而蒙特卡罗法在求解过程中只涉及局部几个结点的计算，不需要计算刚度矩阵，所用计算容量较少。

参考文献：

- [1] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1985. 13 - 15.
- [2] 马文淦. 计算物理学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2001. 4 - 6.
- [3] Bohm TD, Deluca P M, Cox L J, *et al.* Monte Carlo calculations to characterize the source for neutron therapy facilities[J]. *Medicine Physics*, 2000, 27(5):783 - 792.
- [4] 郑邦民, 赵 昕. 计算水动力学[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2001. 38 - 86.

Applications of the Monte Carlo method to potential flow^{*}

JI Qing-feng¹, ZHENG Bang-min²

(1. *College of Hydraulic Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China;*

2. College of Water Resources and Hydropower, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract : The Monte Carlo method is applied to simulate the flow with complex boundaries. In order to improve the simulation precision, a new Monte Carlo method with irregular random walk grid for solving the partial differential equation is presented. The sluice and spillway flow is solved by the Monte Carlo method. The numerical results agree well with the experiment data. Compared with the finite element method, the Monte Carlo method is more effective for linear problems such as potential flow. It can calculate the velocity and pressure respectively at any points in flow field.

Key words : Monte Carlo method; irregular random walk grid; random walk model; complex boundary; potential flow

* The project is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50279044).