曲线坐标系二维带自由表面强紊动水流数值模拟

戴会超[1,2] , 魏文礼[3]

(1. 中国长江三峡工程开发总公司, 湖北 宜昌 443002; 2. 河海大学, 江苏 南京 210098;
3. 西安理工大学水利水电学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 将追踪自由表面的流体体积(VOF)法应用于曲线坐标系下水流控制方程的求解中,计入流线弯曲对水流紊动特性的影响, 建立了垂向二维强紊动水流的曲率修正的紊流模型, 并对溢流坝反弧段的紊流特性进行了数值模拟。数值计算时, 采用有限体积法离散水流的控制方程; 物理变量, 如: 压力 P、紊动参量 κ、ε、γ_t 等, 采用交错方式排列(交错网格布置) ,用 SIMPLEC 算法求解离散方程。计算结果表明, 得到的溢流坝反弧段的自由表面位置、速度场、压力场、剪应力分布和紊动能分布与实验结果吻合良好。

关 键 词: 曲线坐标系; 有限体积法; 自由表面; 强紊动水流; 数值模拟; VOF 法
中图分类号: TV131.21 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-6791(2004)06-0728-06

随着工程实践的发展, 高水头、大流量水工建筑物日益增多, 与之相关的诸如空化、空蚀等一系列高速水力学问题日益突出。泄水建筑物的反弧段易产生负压, 导致水流不稳定或水流空化数过低, 反弧段由于具有自由表面和受显著曲率壁面的影响, 离心力和重力都不容忽视, 形成了十分复杂的水流现象, 高速水流流经反弧段往往造成严重的空蚀破坏, 是工程界极为关注的研究课题。传统的方法是以实验为主的, 随着数值计算技术的发展, 数值模拟逐步成为强有力的研究手段, 但是由于泄水建筑物流场复杂, 并且具有不规则的几何边界及自由水面, 进行数值计算比较困难。以势流理论为基础采用有限元法, 文献[1,2]对于溢流坝面的流场进行了数值分析, 文献[3]则研究了三维过坝水流问题; 随着紊流理论的发展, 紊流模型在水力学中广泛应用, 文献[4]采用极坐标系下 k-ε 的模型对反弧段紊流场进行了模拟; 文献[5]采用紊流模型, 并辅以 VOF 法追踪自由表面对淹没水跃进行了数值模拟; 文献[6]采用曲率修正的紊流模型数值模拟了“龙抬头”泄洪洞紊动水流的水力特性。本文在前人研究的基础上, 对标准紊流数学模型进行了改进, 计入了流线弯曲对水流紊动特性的影响; 将追踪自由表面的 VOF 法应用于曲线坐标系下水流控制方程的求解中, 建立垂向二维的强紊动水流数学模型。采用该数学模型对溢流坝反弧段水流的水力特性进行数值计算, 计算结果反映了反弧段压强、剪应力、紊动动能和自由表面等分布规律, 为研究泄水建筑物反弧的空化、空蚀问题提供有效的手段。

1 正交曲线网格变换

对于二维问题, 求解下列一组 Poisson 方程实现坐标变换[5~8]:

$$\zeta_{xx} + \zeta_{yy} = P(\xi,\eta) \tag{1}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi,\eta) \tag{2}$$

其逆变换方程为

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(Px_\xi + Qx_\eta) = 0 \tag{3}$$

收稿日期: 2004-07-27; **修订日期**: 2004-08-10
作者简介: 戴会超(1965 -) , 男, 河北保定人, 中国长江三峡工程开发总公司教授级高级工程师, 河海大学特聘教授, 主要从事水利水电技术工作。E-mail: dai-huichao@ctgpc.com.cn

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Py_\xi + Qx_\eta) = 0 \tag{4}$$

式中　$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$；$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$；$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$；$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$；$x$、$y$ 为物理平面上网格节点坐标；ξ、η 为计算平面上网格节点坐标；P、Q 为调节因子，其作用是调整实际物理平面上曲线网格的形状及疏密程度。P、Q 调节函数的形式将直接影响所生成曲线网格的质量，因此，控制网格分布的调节函数 P、Q 的构造就成了网格生成技术研究的主要内容。文献[6]对其进行了研究，提出了一组新的 P、Q 函数，形式为

$$P = \phi(\xi,\eta)/(x_\xi^2 + y_\xi^2) \tag{5}$$

$$Q = \psi(\xi,\eta)/(x_\eta^2 + y_\eta^2) \tag{6}$$

式中　$\phi = -\dfrac{x_\xi x_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\xi}}{x_\xi^2 + y_\xi^2} + \dfrac{x_\xi x_{\eta\eta} + y_\xi y_{\eta\eta}}{x_\eta^2 + y_\eta^2}$；　$\psi = -\dfrac{x_\eta x_{\eta\eta} + y_\eta y_{\eta\eta}}{x_\eta^2 + y_\eta^2} + \dfrac{x_\eta x_{\xi\xi} + y_\eta y_{\xi\xi}}{x_\xi^2 + y_\xi^2}$。

采用中心差分格式离散式(3)中的各阶导数，并代入其中(为方便取 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$)，整理成迭代形式的三对角系数矩阵方程，采用 TDMA 计算技术求解。边界条件通常按边界值给出，并且在迭代过程中根据正交性 $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0$ 的要求允许边界节点沿边界滑动，以保证边界处的网格正交。

2　数值模型及计算方法

2.1　正交曲线坐标系下水流控制方程

二维正交曲线坐标系下水流的控制方程为

连续方程

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}(Uh_\eta) + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(Vh_\xi) = 0 \tag{7}$$

动量方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta UU) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi VU) + VU\frac{\partial h_\xi}{\partial\eta} - V^2\frac{\partial h_\eta}{\partial\xi}\right] = \\ &g_\xi - \frac{1}{\rho h_\xi}\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta\sigma_{\xi\xi}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi\sigma_{\eta\xi}) + \sigma_{\xi\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial\eta} - \sigma_{\eta\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial\xi}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta UV) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi VV) + UV\frac{\partial h_\eta}{\partial\xi} - U^2\frac{\partial h_\xi}{\partial\eta}\right] = \\ &g_\eta - \frac{1}{\rho h_\eta}\frac{\partial P}{\partial\eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta\sigma_{\xi\eta}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi\sigma_{\eta\eta}) + \sigma_{\eta\xi}\frac{\partial h_\eta}{\partial\xi} - \sigma_{\xi\xi}\frac{\partial h_\xi}{\partial\eta}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

式中　ξ、η 为映射平面坐标值；U、V 为 ξ、η 方向速度；h_ξ、h_η 为 ξ、η 方向拉梅系数；g_ξ、g_η 为 ξ、η 方向单位质量力；$\sigma_{\xi\xi}$、$\sigma_{\xi\eta}$、$\sigma_{\eta\xi}$、$\sigma_{\eta\eta}$ 为应力项。

$$\sigma_{\xi\xi} = 2\gamma_{eff}\left[\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{\eta\eta} = 2\gamma_{eff}\left[\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial\eta} + \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi} = \gamma_{eff}\left[\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{V}{h_\eta}\right) - \frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U}{h_\xi}\right)\right]$$

k- 输运方程

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(Ukh_\eta) + \frac{\partial}{\partial\eta}(Vkh_\xi)\right] = \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\gamma_t}{\sigma_k}\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\gamma_t}{\sigma_k}\frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right)\right] + P_k - \varepsilon \tag{10}$$

ε- 输运方程

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(U\varepsilon h_\eta)+\frac{\partial}{\partial \eta}(V\varepsilon h_\xi)\right]=\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\gamma_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\gamma_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)\right]+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{11}$$

紊动动能产生项

$$P_k=\sigma_{\xi\xi}\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)+\sigma_{\xi\eta}\left[\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}+\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}+\frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)\right]+\sigma_{\eta\eta}\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right) \tag{12}$$

$$\gamma_t=C_\mu\cdot\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{13}$$

k-ε 模型中常数为 $C_\mu=0.09$, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$。

2.2 正交曲线坐标系下紊流模型的曲率修正

对有流线弯曲的水流, 有必要精确地描述紊动应力各分量的输运。为了以低廉的计算机费用考虑到各应力分量不同的产生过程和破坏过程, 并在一定程度上计及这些分量的输运过程, 以标准 k-ε 模型为基础的曲率修正紊流模型便受到广泛重视。许多学者对此进行了深入研究。考虑曲率修正的方法主要有两类: 一是修正柯莫哥洛夫-普朗特表达式中的常数 C_μ, 使其成为合适的水流参数的函数; 二是修正 k 方程和 ε 方程中的经验常数。在修正 ε 输运方程的经验常数中, LPL 法最为典型。Launder , Priddin and Sharma[9] 对 ε 方程中的常数进行修正, 认为它是基于含能时间尺度的紊流 Richardson 数的函数, 耗散率 ε 输运方程中的系数 $C_{2\varepsilon}$ 被修正为

$$-C_{2\varepsilon}(1-C_cR_{ir})(\varepsilon^2/k)$$

其中紊流 Richardson 数定义为

$$R_{ir}=\frac{k^2}{\varepsilon^2}\frac{\hat{U}}{r^2}\frac{\partial(\hat{U}r)}{\partial r}$$

式中 $\hat{U}$ 为与流线相切的速度; r 为流线的曲率半径; C_c 为经验常数, 文献[6,9]中取为 0.2, 这里仍取 0.2 并用此方法计算了凹曲率面和凸曲率面紊流边界层流动, 计算结果与试验值符合良好。

2.3 控制方程的数值离散

为推导方便, 将水流控制方程写成通用形式:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}(U\Phi h_\xi)+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(V\Phi h_\xi)=\frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\gamma_\Phi\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\gamma_\Phi\frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)+S_\Phi \tag{14}$$

式中 γ_Φ 为粘性系数; S_Φ 为源项, 对于不同的 Φ 有不同的含义。表1为 Φ 不同时 γ_Φ、S_Φ 的表达式。

将通用微分方程(14)在图1所示的控制体积上显式积分后得

$$\Phi_P^{n+1}=\Phi_P-\frac{\Delta t}{VOL}[ADV\Phi-DIF\Phi+S_\Phi] \tag{15}$$

式中 $ADV\Phi=A_cU_e\Phi_e-A_wU_w\Phi_w+A_nV_n\Phi_n-A_sV_s\Phi_s$; $DIF\Phi=(\gamma_\Phi)\frac{A_e}{\Delta S_e}(\Phi_E-\Phi_P)-(\gamma_\Phi)_w\frac{A_w}{\Delta S_w}(\Phi_P-\Phi_w)+(\gamma_\Phi)_n(\Phi_N-\Phi_P)-(\gamma_\Phi)_s\frac{A_s}{\Delta S_s}(\Phi_P-\Phi_S)$; $ADV\Phi$、$DIV\Phi$ 和 S_Φ 分别为通用微分方程的对流项、扩散项和源项; A_e、A_w、A_n 和 S_s 为控制交界面曲线弧长; VOL 为控制体积。

在动量方程离散时通常用交错网格, 将压力项从源项中分离出来。k、ε 源项仍然采用线性隐式化处理, 采用压力迭代法求解压力场。各方程离散格式整理后如下:

表 1　二维正交曲线坐标系下源项及粘性系数

Table 1　Source item and adhesion-coefficient of two dimensional orthogonal curvilinear coordinate

Φ	S_Φ	γ_Φ
U	$g\xi - \frac{1}{\rho h_\xi}\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{UV}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + \frac{V^2}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\gamma_U \frac{h_\eta}{h_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{2V}{h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)\right] + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\gamma_U h_\xi\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} - \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)\right] + \frac{\gamma_U}{h_\xi h_\eta}\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} - \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} - \frac{2\gamma_U}{h_\xi h_\eta}\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}$	$\gamma + \gamma_t$
V	$g\eta - \frac{1}{\rho h_\xi}\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{UV}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} + \frac{U^2}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\gamma_\Phi \frac{h_\xi}{h_\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{2U}{h_\xi}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)\right] + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\gamma_\Phi h_\eta\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} - \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)\right] + \frac{\gamma_\Phi}{h_\xi h_\eta}\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} - \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} - \frac{2\gamma_\Phi}{h_\xi h_\eta}\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}$	$\gamma + \gamma_t$
k	$\gamma_\Phi\left[2\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{V}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} - \frac{U}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta}\right)^2\right] - \varepsilon\ (= P_k - \varepsilon)$	$\gamma + \frac{\gamma_t}{\sigma_k}$
ε	$C_{1\varepsilon}P_k\frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}$	$\gamma + \frac{\gamma_t}{\sigma_\varepsilon}$

动量方程(8)、(9)**离散格式**:

$$U_P^{n+1} = U_P - \frac{\Delta t}{VOL_x}[ADVU - DIFU + SPGX + A_\Phi^U] + g\xi\Delta t \tag{16}$$

$$V_P^{n+1} = V_P - \frac{\Delta t}{VOL_y}[ADVV - DIFV + SPGY + A_\Phi^V] + g\eta\Delta t \tag{17}$$

式中　$SPGX$ **为** U **方程的压力项**, $SPGX = \frac{1}{\rho}(P_E - P_P)A_e$; $SPGY$**为** V **方程的压力项**, $SPGY = \frac{1}{\rho}(P_N - P_P)A_n$; VOL_x、VOL_y **分别为** U **控制体、**V **控制体体积**; S_Φ^U、S_Φ^V **为正交曲线坐标引起的附加源项，当为直角坐标时为零。**

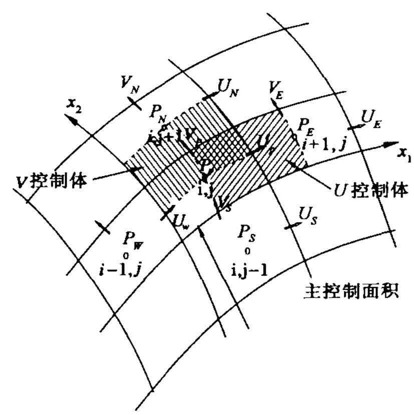

图 1　正交曲线网格示意图

Fig. 1　Orthogonal curvilinear coordinate

压力迭代方程的离散格式:

$$P^{m+1} = P^m + \delta P \tag{18}$$

$$D^m = A_e U_e^m - A_w U_w^m + A_n V_n^m - A_s V_s^m \tag{19}$$

$$U_w^{m+1} = U_w^m - \Delta t\frac{\delta P}{\rho(\delta x)_w} \tag{20}$$

$$U_e^{m+1} = U_e^m + \Delta t\frac{\delta P}{\rho(\delta x)_e} \tag{21}$$

$$V_n^{m+1} = V_n^m - \Delta t\frac{\delta P}{\rho(\delta y)_n} \tag{22}$$

$$V_s^{m+1} = V_s^m - \Delta t \frac{\delta P}{\rho(\delta y)_s} \tag{23}$$

将式(19) ～式(23) 代入式(18) 并令 $D_{n+1} = 0$, 得

$$\delta P = - \frac{\omega D^m}{\Delta t A}\rho \tag{24}$$

式中 ω为超松驰系数; $A = \left[\frac{A_e}{(\delta x)_e} + \frac{A_w}{(\delta x)_w}\right] + \left[\frac{A_n}{(\delta y)_n} + \frac{A_s}{(\delta y)_s}\right]$。

k-ε方程(10) 、(11) 的离散格式为

$$K^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{2C_\mu k}{\gamma_{eff}}\Delta t}\left\{K + \frac{\Delta t}{VOL}[-ADVK + DIFK + P_k + \varepsilon]\right\} \tag{25}$$

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{1}{1 + 2C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\Delta t}\left\{\varepsilon + \frac{\Delta t}{VOL}\left[-ADVE + DIFE + C_{21}P_K\frac{\varepsilon}{K} + C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{K}\right]\right\} \tag{26}$$

2.4 自由表面的处理

采用VOF法追踪自由表面。VOF法的基本思想为: 在能够被流体通过的空间点上定义函数 F, 并定义其在含有流体的空间点上取1, 不含流体的空间点上取0。它是一个台阶函数, 这里对其进行如下的处理: 在离散网格中取网格内流体体积所占该网格中能够被流体通过的空间体积的比值, 当网格中充满流体时取1, 不含流体时取0; 当网格为自由表面网格时, 流体没有充满网格, $F \in (0, 1)$, 我们称它为流体体积函数。它是空间点与时间的函数, 即 $F = F(x, y, z, t)$,可理解为固结在流体质点上并随流体质点一起运动的没有质量、没有粘性的着色点的运动, 其输运微分方程为 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = 0$, 即

$$F_t + (U \nabla F) = 0 \tag{27}$$

将 F 的控制方程变换到曲线坐标系下

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta F U) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi F V)\right] = 0 \tag{28}$$

用有限体积法将其离散为

$$F^{n+1} = F - \frac{\Delta t}{VOL}[A_e F_e U_e - A_w F_w U_w + A_n F_n V_n - A_s F_s V_s] \tag{29}$$

式中 F 为旧时步 n 的值, 定义在网格中心; F^{n+1}为新时步 $n+1$的值。F_e、F_w、F_n、F_s 的插值采用DA[5]方法。

有了网格 F^{n+1}值的大小, 根据梯度概念找出其变化率最大值所在方向即为自由表面的法线方向。在网格中以此为法线, 画一小平面将网格分为两部分, 其中含流体部分的体积所占比例等于 F^{n+1}, 这个小平面就代表该网格处的自由表面。

2.5 边界条件

进口边界处速度按实测值给定, 紊动动能和耗散率按经验公式确定; 出口边界按充分发展水流条件确定, 即物理量沿水流方向梯度为0; 固壁边界处速度按无滑移条件给定, k 和 ε 按壁面函数技术确定; 自由表面处的边界条件为法向速度为0, 压力为大气压, k 和 ε 的法向梯度为0。

3 实例分析

采用本文的数学模型计算了溢流坝单圆弧反弧段水流。边界条件根据3.5节给定, 在计算过程中, 采用VOF法追踪自由表面运动。计算的自由表面形状、压力分布、剪应力分布、紊动动能分布见图2～图5。

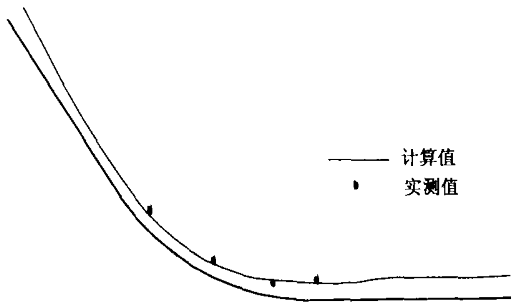

图 2　水面线位置图

Fig.2　Water surface position

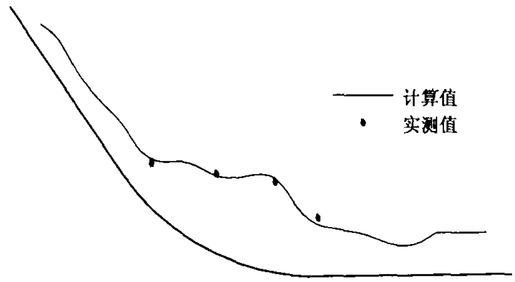

图 3　壁面压力系数 C_p 沿程分布

Fig.3　Distribution of C_p

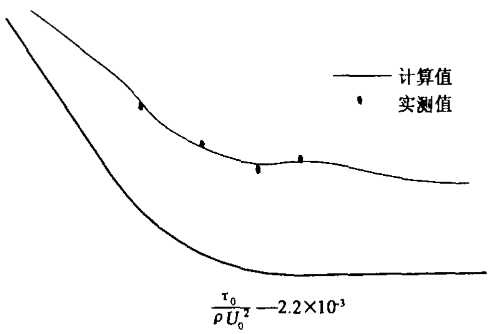

图 4　壁面剪应力系数 C_f 沿程分布

Fig.4　Distribution of C_f

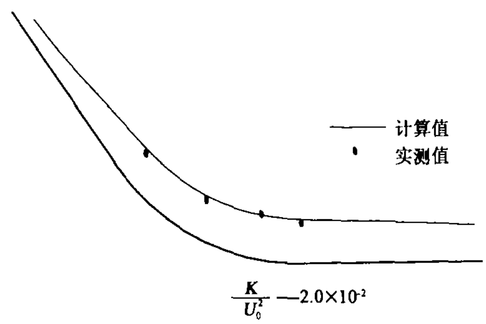

图 5　壁面紊动动能 k 沿程分布

Fig.5　Distribution of k

由图 3 可见，反弧段由于离心力的作用，形成了从直线段到反弧段的最大压力断面之间的压力上升区以及最大压力断面至反弧末端之间的压力下降区，与实验研究结果一致。

由图 4 和图 5 可见，反弧末端剪应力系数及紊动动能沿程增加，至反弧末端达到最大，亦与实验研究结果相吻合。

4　结　　论

本文针对水利工程中紊流现象的四大显著特点：强紊动性、各向异性、带有自由表面和具有复杂的几何边界，采用正交曲线坐标系下曲率修正的紊流模型与流体体积(VOF)法相结合，用有限体积法对计算区域进行离散，成功地模拟了溢流坝反弧段的紊流特性，得到了溢流坝反弧段紊流的自由表面形状、压力分布、剪应力分布、紊动动能分布等。

实际计算表明，VOF 法是一种解决复杂自由水面问题的有效方法，它能够很好地模拟流经溢流坝反弧段上的复杂紊流的自由水面；适体坐标的采用将复杂的物理区域变换成规则的计算域，可以很好地解决溢流坝反弧段体型复杂的问题；紊流模型的曲率修正，计入了流线弯曲对紊流紊动各向异性的影响，计算精度高。本文的数学模型，为泄水建筑物反弧水流的水力特性和泄水建筑物抗蚀体型的研究提供了有效的手段。该研究成果可以进一步推广到三维水利工程问题的研究中。

参考文献：

[1] 许协庆．自由面重力流的一种有限元解法[J]．水利学报，1980 (1) :1 - 13.

[2] 郑邦民. 溢流体形的数值模拟[J]. 中国科学A辑, 1985(3):281 - 289.
[3] 丁道扬. 三维过坝水流数值模拟[J]. 水利水运科学研究, 1994(3):185 - 195.
[4] 王奇峰, 李建中. 溢流反弧紊流流动数值模拟[J]. 水利学报, 1993(8):1 - 9.
[5] 戴会超. 泄水建筑物紊流数值模拟研究及应用[D]. 南京:河海大学,1994. 32 - 45.
[6] 魏文礼. 泄水建筑物反弧紊流数值计算及抗蚀体型研究[D]. 南京:河海大学,1996. 47 - 64.
[7] 王玲玲. 复杂紊流场数值试验室研究及应用[D]. 南京:河海大学,2000. 24 - 25.
[8] 金忠青. N-S方程数值解及紊流模型[M]. 南京:河海大学出版社,1989. 54 - 55.
[9] Launder B E, Priddin C H, Sharma B E. The calculation of trbulence boundary layers on spinning and curved surfaces[J]. Transactions of the ASME,J Fluid Eng, 1977,99:231 - 239.

Numerical simulation of two-dimensional strong turbulence flow with free surface in orthogonal curvilinear coordinate system

DAI Hui-chao[1,2], WEI Wen-li[3]

(1. *China Yangtze River Three Gorges Project Development Corporation, Yichang* 443002, *China*; 2. *Hohai University, Nanjing* 210098, *China*; 3. *Institute of Water Conservancy and Hydraulic Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an* 710048, *China*)

Abstract: This paper is concerned with a mathematical model for two-dimensional strong turbulence flow with free surface including the effects of streamline curvature in orthogonal curvilinear coordinate system, with which the characteristics of the turbulence flow field on the ogee spillway is numerical simulated. In the numerical simulation, the flow control equation in orthogonal curvilinear coordinate system is discretized by the finite volume method; the physical parameters, pressure P, U, V, k, ε, γ_t etc., are arranged on a staggered grid; the discretized equations are solved by SIMPLEC method; and the complex free surface is dealt with VOF method. The computed results show that the velocity fields, pressure field, shear stress distribution and kinetic energy of turbulent flow on the ogee spillway are in agreement with the experimental data.

Key words: curvilinear coordinate system; finite volume method; free surface; strong turbulence flow; numerical simulation; volume of fluid method